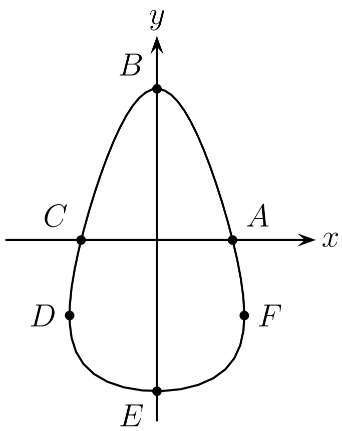
Problème 1 (poids 3)



Les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)} \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

décrivent une courbe représentée ci-contre que nous appelerons *menhir*.

a) Déterminer par calcul les points d'intersection du menhir avec chaque axe de coordonnées.

b) Déterminer par calcul les points du menhir en lesquels la tangente est verticale.

c) Les paraboles d'équation $y = a\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$ passent par les points A et C situés sur le menhir. Trouver le nombre a de sorte à minimiser la somme des carrés des distances verticales de la parabole aux points $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $E(0;-1)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.

d) Exprimer $x(t)$ en fonction de $y = y(t)$ lorsque $x \geqslant 0$. On obtient alors une expression $x = f(y)$ définie pour $y \in [-1;1]$.

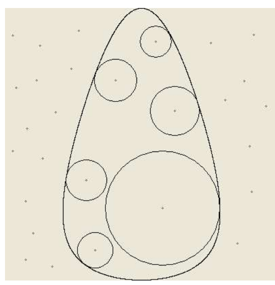
e) Le menhir est contenu dans le carré défini par $x \in [-1;1]$ et $y \in [-1;1]$. On représente ce carré par une zone graphique (`Picture1`) de dimensions 401×401 pixels. Écrire un programme qui trace le menhir dans cette zone graphique.

f) Écrire un programme qui estime les coordonnées des points d'intersection du menhir avec un cercle centré en l'origine et dont le rayon est indiqué par l'utilisateur dans une zone de texte (`Text1`). Pour cela, on fait varier $t \in [0; 2\pi]$ par pas $h = \frac{1}{1024}$ et si deux valeurs consécutives de t fournissent sur le menhir un point interne et un point externe au cercle, on ajoute dans une liste (`List1`) les coordonnées du point associé à la moyenne de ces valeurs.

g) Écrire le code d'une fonction `d(x,y)` qui estime la plus courte distance, en pixels, d'un point (`x`; `y`) (de la zone graphique) à la courbe.

h) Écrire le code d'une procédure

`Picture1_MouseDown(..., x As Single, y As Single)`



qui, si le point (`x`;`y`) cliqué par l'utilisateur est à l'intérieur du menhir, dessine le plus grand cercle centré en (`x`;`y`) et entièrement contenu dans le menhir.
Indication : Utiliser les fonctions f et d des questions précédentes.

Problème 2 (poids 2)

On considère l'équation différentielle

$$y'' - y' - 2y = 7$$

et on appelle s la solution vérifiant $s(0) = -1$ et $s'(0) = -1$.

a) Estimer $s(1)$ et $s'(1)$ en utilisant un pas $h = 0.5$ dans la méthode d'Euler.

b) Estimer $s(0.5)$ et $s'(0.5)$ en utilisant un pas $h = 0.5$ dans la méthode de Runge.

On applique la méthode d'Euler avec un pas h inconnu afin d'estimer $s'(3h)$ et on note $p(h)$ cette estimation.

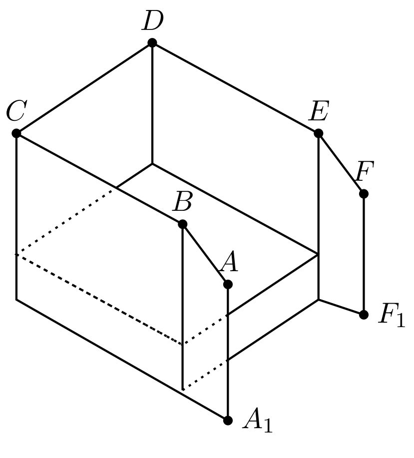
c) Montrer que $p(h) = 10h^3 + 6h^2 + 12h - 1$.

d) En utilisant la méthode de la bissection (Bolzano) à partir de l'intervalle $[0; 0.08]$, trouver un intervalle de longueur $\leqslant 0.01$ contenant un zéro de p. En considèrant le milieu de cet intervalle, déduire une estimation de l'abscisse d'un point à tangente horizontale du graphe de s.

e) Le graphe de s admet un minimum dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1. Ecrire un programme qui calcule et affiche une estimation des coordonnées de ce point en utilisant un pas $h = \frac{1}{1024}$ dans la méthode de Runge.

f) L'expression de la fonction s est de la forme $s(x) = a \cdot e^{-x} + b \cdot e^{2x} + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a, b et c.

Problème 3 (poids 2)



On considère un parallélépipède rectangle entouré de trois parois verticales comme illustré ci-contre.

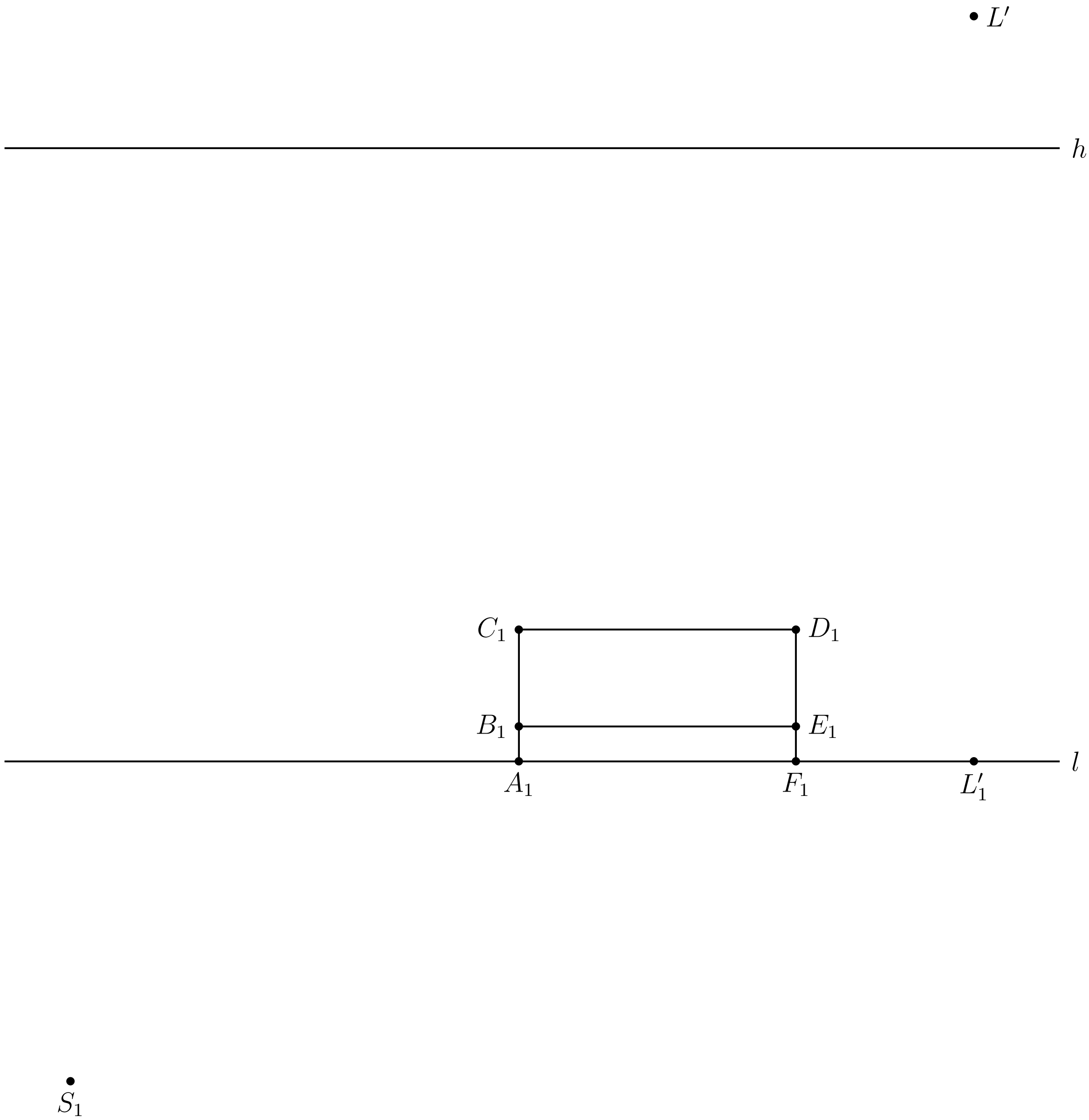
- la hauteur du parallélépipède est égale à 1.2 cm,
- les points A et F sont dans l'écran, à une hauteur de 5 cm,
- la cote des points B, C, D et E est égale à 6.2 cm

La projection dans le sol de cet objet est donnée sur la feuille annexée. On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.

a) Construire la perspective de cet objet.

b) Cet objet est éclairé par une source lumineuse ponctuelle L donnée par L' et L'_1. Construire et hachurer la perspective de la partie visible de l'ombre de l'objet sur le sol et sur le parallélépipède rectangle.

Nom et prénom : .... Classe : ....



Problème 1

a) $x(t)$ est nul lorsque $\cos(t) = 0$, $t \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$, donc $B(0;1)$ et $E(0;-1)$.
$y(t)$ est nul lorsque $\sin(t) = 0$, $t \in \{0;\pi\}$, donc $A(0.5;0)$ et $C(-0.5;0)$

b) $\dot{x} = \dfrac{-\sin(t)(2+\sin t)-(\cos t)^2}{(2+\sin t)^2} = \dfrac{-2\sin(t)-(\sin t)^2-(\cos t)^2}{(2+\sin t)^2} = \dfrac{-2\sin(t)-1}{(2+\sin t)^2}$
est nul lorsque $\sin(t) = -\frac{1}{2}$, $t \in \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$, donc $D(-\sqrt{3}/3;-1/2)$ et $F(\sqrt{3}/3;-1/2)$

c) Les points $D(-\sqrt{3}/3;-1/2)$, $E(0;-1)$ et $F(\sqrt{3}/3;-1/2)$ sont estimés respectivement par $D'(-\sqrt{3}/3;a/12)$, $E'(0;-a/4)$ et $F'(-\sqrt{3}/3;a/12)$. La fonction des moindres carrés est $f(a) = 2\left(\frac{1}{12}a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}a+1\right)^2$. La dérivée est

$$f'(a) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}a+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}a+1\right) = \frac{11}{72}a - \frac{1}{3},$$

Elle est nulle lorsque $a = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{72}{11} = \dfrac{24}{11}$.

d) $x^2 = \dfrac{(\cos t)^2}{(2+\sin t)^2} = \dfrac{1-(\sin t)^2}{(2+\sin t)^2} = \dfrac{1-y^2}{(2+y)^2}$ donc $x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{2+y}$.

e)
```
For t = 0 To 8 * Atn(1) Step 1 / 1024
    Let xt = Cos(t) / (2 + Sin(t))
    Let yt = Sin(t)
    If t = 0 Then Picture1.PSet (200 + 200 * xt, 200 - 200 * yt)
    Picture1.Line -(200 + 200 * xt, 200 - 200 * yt)
Next t
```

f)
```
Let r = Val(Text1.Text)
Let h = 1 / 1024
For t = 0 To 8 * Atn(1) Step h
    Let X1 = Cos(t) / (2 + Sin(t))
    Let Y1 = Sin(t)
    Let diff1 = Sqr(X1 ^ 2 + Y1 ^ 2) - r
    Let t2 = t + h
    Let X2 = Cos(t2) / (2 + Sin(t2))
    Let Y2 = Sin(t2)
    Let diff2 = Sqr(X2 ^ 2 + Y2 ^ 2) - r
    If diff1 * diff2  <= 0 Then
        Let t3 = t + h / 2
        Let X3 = Format(Cos(t3) / (2 + Sin(t3)), "0.000")
        Let X3 = Format(Sin(t3), "0.000")
        List1.AddItem (X3 & " ; " & Y3)
    End If
Next t
```

g)
```
Function d(x, y)
    For t = 0 To 8 * Atn(1) Step 1 / 1024
        Let xt = 200 + 200 * Cos(t) / (2 + Sin(t))
        Let yt = 200 - 200 * Sin(t)
        Let d2 = Sqr((xt - x) ^ 2 + (yt - y) ^ 2)
        If t = 0 Or d2 < d Then d = d2
    Next t
End Function
```

h)
```
Picture1.Circle (x, y), 1, 80 * RGB(1, 1, 1)  ' Facultatif
Let x0 = (x - 200) / 200
Let y0 = (200 - y) / 200
If x0 ^ 2 < (1 - y0 ^ 2) / (2 + y0) ^ 2 Then
    Picture1.Circle (x, y), d(x, y)
End If
```

Problème 2

a) On itère la transformation $(x;y;y')\xrightarrow[y''=y'+2y+7]{}(x+0.5;y+0.5y';y'+0.5y'')$:
$(0;-1;-1)\xrightarrow[y''=4]{}(0.5;-1.5;1)\xrightarrow[y''=5]{}(1;-1;3.5)$.
On a donc les estimations $s(1)\cong -1$ et $s'(1)\cong 3.5$.

b) On utilise la méthode d'Euler avec un pas $h=0.25$:
$(x;y;y')=(0;-1;-1)\xrightarrow[y''=4]{}(x_*;y_*;y'_*)=(0.25;-1.25;0)$ donc $y''_*=4.5$
puis on calcule $(x+0.5;y+0.5y'_*;y'+0.5y''_*)=(0.5;-1;1.25)$.
On a donc $s(0.5)\cong -1$ et $s'(0.5)\cong 1.25$.

c) On itère la transformation $(x;y;y')\xrightarrow[y''=y'+2y+7]{}(x+h;y+hy';y'+hy'')$:
$(0;-1;-1)\xrightarrow[y''=4]{}(h;-h-1;4h-1)\xrightarrow[y''=2h+4]{}(2h;4h^2-2h-1;2h^2+8h-1)$
$\xrightarrow[y''=10h^2+4h+4]{}(3h;\ldots;10h^3+6h^2+12h-1)$, donc $s'(3h)\cong 10h^3+6h^2+12h-1$.

d) On a $I_0=[0;0.08]=[0;0.04]\cup[0.04;0.08]$ et comme $p(0.04)<0<p(0.08)$, on retient $I_1=[0.04;0.08]=[0.04;0.06]\cup[0.06;0.08]$. Comme $p(0.06)<0<p(0.08)$, on retient ensuite $I_2=[0.06;0.08]=[0.06;0.07]\cup[0.07;0.08]$ et comme $p(0.07)<0<p(0.08)$, on retient finalement $I_3=[0.07;0.08]$ qui est l'intervalle cherché. Le milieu de cet intervalle est $h=0.075$ et l'abscisse du p.t.h. est estimé par $3h=0.225$.

e)
```
Let h = 1 / 1024
Let x = 0
Let y = -1
Let yp = -1
Do
    Let xe = x + 0.5 * h
    Let ye = y + 0.5 * h * yp
    Let ype = yp + 0.5 * h * (yp + 2 * y + 7)
    Let x = x + h
    Let y = y + h * ype
    Let yp = yp + h * (ype + 2 * ye + 7)
Loop Until yp > 0
Let x = Int(1000 * x + 0.5) / 1000
Let y = Int(1000 * y + 0.5) / 1000
Label1.Caption = "X = " & x & " , Y =  " & y
```

f) On a $s'(x)=-ae^{-x}+2be^{2x}$ et $s''(x)=ae^{-x}+4be^{2x}$. L'équation différentielle se réécrit simplement $-2c=7$, donc $c=-3.5$. On doit encore avoir $s(0)=s'(0)=-1$, c'est-à-dire $a+b-3.5=-1$ et $-a+2b=-1$. En additionnant ces équations, on obtient $3b+1.5=-2$, donc $3b=1.5$, $b=0.5$ et $a=2b+1=2$. Au total, on a $s(x)=2e^{-x}+0.5e^{2x}-3.5$.

Problème 3