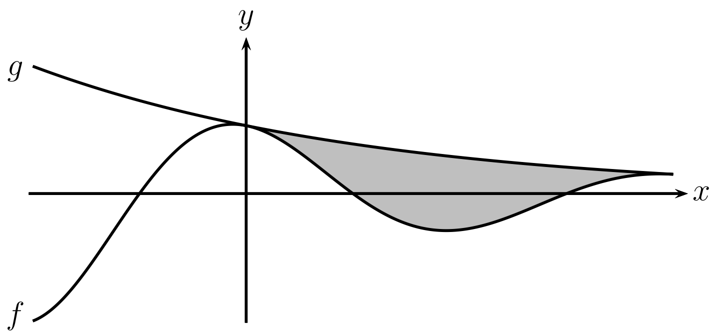
Mathématiques niveau II

Problème 1 (poids 3)

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = e^{-x/5}\cos(x)$ et $g(x) = e^{-x/5}$.
Les graphes de ces deux fonctions sont donnés dans un système orthonormé.



a) Trouver les zéros de f.

b) Déterminer, pour $x \in [-\pi; 2\pi]$, les points à tangente horizontale du graphe de f (coordonnées à arrondir au centième).

c) Déterminer, pour $x \in [-\pi; 2\pi]$, les deux points communs aux graphes de f et de g.

d) En dérivant $F(x) = (a\cos(x) + b\sin(x))e^{-x/5}$, trouver a et b tels que F soit une primitive de f.

e) Calculer l'aire de la surface grisée.

f) La tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$ passe-t-elle par un point d'intersection du graphe de f et de l'axe des x ?
Justifier la réponse par calcul.

g) Résoudre l'équation différentielle $5y' + y = -5e^{-x/5}\sin(x)$.
Déterminer la solution particulière s de cette équation telle que $s(0) = -1$.

Problème 2 (poids 3)

Dans l'espace V_3 muni de la base standard, on considère l'application linéaire f donnée par la matrice F ainsi que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ suivants :

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer l'image des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ par la transformation f.

b) Interpréter géométriquement la transformation f en la décrivant avec précision.

On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} k & m & m \\ m & k & m \\ m & m & k \end{pmatrix}$, où k et m sont des nombres réels.

c) Pour quelles valeurs de k et m la matrice T décrit-elle une transformation orthogonale ? Donner toutes les solutions.

On pose $k = -\frac{1}{3}$ et $m = \frac{2}{3}$. On a donc $T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer les vecteurs invariants de l'application linéaire définie par T.

e) Interpréter géométriquement la transformation orthogonale donnée par T en la décrivant avec précision.

On considère la transformation g associée à la matrice $M = F + \alpha T$, où α est un nombre réel.

f) Déterminer la valeur de α pour que le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit invariant par g.

g) Montrer que $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est une base de V_3 constituée de vecteurs propres de g, et donner la matrice associée à g dans cette base en fonction de α.

Problème 3 (poids 2)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & w = f(z) = \dfrac{z+2}{\overline{z}} \end{array}$$

ainsi que les nombres complexes $z_0 = 2$, $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$ et $z_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$.

a) Donner la forme trigonométrique des nombres z_0, z_1 et z_2. Ces trois nombres forment un triangle dans le plan de Gauss. Que peut-on dire de ce triangle ?
Trouver une équation polynomiale à coefficients réels dont z_0, z_1 et z_2 sont les solutions.

b) Calculer $f(z_1)$ et $f(1+i)$ (réponses sous forme cartésienne).

c) Déterminer tous les nombres z qui vérifient $f(z) = -1$.

Pour $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a $f(z) = w = u + vi$ avec

$$u = \frac{x^2 - y^2 + 2x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{2y(x+1)}{x^2 + y^2}.$$

d) Déterminer l'image par f de la droite $y = x$ (privée de l'origine).

e) Les points du plan de Gauss dont les images sont sur la droite $u = 1$ forment une courbe. Déterminer l'équation de cette courbe et dessiner cette courbe.

f) Vérifier que l'image par f de la droite $x = -2$ est sur un cercle centré en $(-\frac{1}{2}\,; 0)$. Déterminer le rayon de ce cercle.

g) Plus généralement, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$f(z) = \frac{z+c}{\overline{z}} \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle.}$$

Trouver toutes les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction f n'admet aucun point fixe.

Problème 4 (poids 2)

Une urne contient des billes de couleur. On effectue des tirages successifs **avec remise**.

Première partie

L'urne contient 100 billes : 30 bleues, 15 vertes et 55 rouges.

a) On effectue 3 tirages. Quelle est la probabilité de tirer 3 billes de couleurs différentes ?

b) On effectue 3 tirages. Quelle est la probabilité de tirer plus de billes rouges que de billes bleues ?

c) On effectue 10 tirages. Quelle est la probabilité de tirer exactement 3 billes bleues ?

d) Déterminer le nombre minimal de tirages qu'il faut effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille bleue soit supérieure à 95%.

e) On tire des billes de l'urne jusqu'à ce qu'on obtienne une bille bleue. Calculer la probabilité que
   e1) le nombre de tirages soit égal à 2,
   e2) le nombre de tirages soit inférieur à 4,
   e3) le nombre de tirages soit un multiple de 3.

Deuxième partie

L'urne contient 100 billes : 30 bleues, N vertes et des rouges.

f) On effectue deux tirages. Calculer N pour que la probabilité de tirer deux billes de même couleur soit de 46%.

g) On effectue un seul tirage. Calculer N pour que la probabilité de tirer une bille rouge sachant qu'elle n'est pas verte soit comprise entre 45% et 55%.

Problème 1

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $f'(x) = -e^{-x/5}(\frac{1}{5}\cos(x) + \sin(x)) = 0 \Longrightarrow \tan(x) = -\frac{1}{5} \Longrightarrow x \cong -0.2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc ici $H_1(-0.2; 1.02)$, $H_2(2.94; -0.54)$ et $H_3(6.09; 0.29)$.

c) $f(x) = g(x) \implies e^{-x/5}(1 - \cos(x)) = 0 \implies \cos(x) = 1 \implies x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc ici $I_1(0; 1)$ et $I_2(2\pi; e^{-2\pi/5})$.

d) $F'(x) = e^{-x/5}((b - \frac{1}{5}a)\cos(x) - (a + \frac{1}{5}b)\sin(x)) = f(x)$, donc $a + \frac{1}{5}b = 0 \Longrightarrow b = -5a$ et $b - \frac{1}{5}a = -5a - \frac{1}{5}a = 1$, d'où $a = -\frac{5}{26}$ et $b = \frac{25}{26}$.

e) $A = \displaystyle\int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \Big[-5e^{-x/5} + (\tfrac{5}{26}\cos(x) - \tfrac{25}{26}\sin(x))e^{-x/5} \Big]_0^{2\pi}$
$= -5e^{-2\pi/5} + \frac{5}{26}e^{-2\pi/5} + 5 - \frac{5}{26} = \frac{125}{26}(1 - e^{-2\pi/5}) \cong 3.44$.

f) Non : cette tangente t a une pente de $f'(0) = -\frac{1}{5}$ et passe par $(0; 1)$, donc on a $t : y = -\frac{1}{5}x + 1$; t coupe l'axe des x en $(5; 0)$, ce qui n'est pas le cas de f.

g) $y = uv$ donne $v(5u' + u) + 5uv' = -5e^{-x/5}\sin(x)$. En choisissant u tel que $5u' + u = 0$, on obtient $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{5} \Longrightarrow u = e^{-x/5}$. Il reste alors $uv' = e^{-x/5}v' = -e^{-x/5}\sin(x)$, d'où $v' = -\sin(x) \Longrightarrow v = \cos(x) + C$, et au total $y = uv = e^{-x/5}(\cos(x) + C)$.
Si $s(0) = -1$, alors $1 + C = -1$ et $C = -2$, donc $s(x) = e^{-x/5}(\cos(x) - 2)$.

Problème 2

a) $f(\vec{a}) = 6\vec{a}$, $f(\vec{b}) = \vec{0}$ et $f(\vec{c}) = 6\vec{c}$.

b) Projection orthogonale sur le plan $\pi : x + y - 2z = 0$ suivie (ou précédée) d'une homothétie de facteur 6.

c) T est orthogonale si $2m^2 + k^2 = 1$ et $m^2 + 2mk = m(m + 2k) = 0$. On en tire
1) $m = 0 \implies k = \pm 1$ (et alors $T = \pm I$) ou
2) $m = -2k \implies 9k^2 = 1 \implies k = \pm\frac{1}{3}$, donc soit $k = \frac{1}{3}$ et $m = -\frac{2}{3}$,
soit $k = -\frac{1}{3}$ et $m = \frac{2}{3}$.

d) $T\vec{v} = \vec{v} \implies (T - I)\vec{v} = \vec{0} \implies \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \implies x = y = z$,
donc $\vec{v} = k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = k\,\vec{a}$, $k \in \mathbb{R}$, est invariant.

e) $\det(T) = 1$, donc c'est une rotation autour de $\vec{a}$.
Comme T est également symétrique, l'angle de rotation est 180° (symétrie axiale).
Ou alors : $\mathrm{Tr}(T) = -1 = 1 + 2\cos(\alpha) \Longrightarrow \cos(\alpha) = -1 \Longrightarrow \alpha = 180°$.
Ou alors : l'image par T de $\vec{p} \perp \vec{a}$ est $-\vec{p}$, donc c'est une symétrie axiale.

f) $M\vec{a} = F\vec{a} + \alpha T\vec{a} = 6\vec{a} + \alpha\vec{a} = (6 + \alpha)\vec{a} = \vec{a} \implies \alpha = -5$.

g) $\vec{a}$ est vecteur propre de valeur propre $6 + \alpha$,
$\vec{b} \perp \vec{a}$ et $M\vec{b} = F\vec{b} + \alpha T\vec{b} = -\alpha\vec{b}$, donc $\vec{b}$ est vecteur propre de valeur propre $-\alpha$,
$\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ et $M\vec{c} = (6 - \alpha)\vec{c}$, donc $\vec{c}$ est vecteur propre de valeur propre $6 - \alpha$.
La matrice de g dans la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est donc $\begin{pmatrix} 6+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 6-\alpha \end{pmatrix}$.

Problème 3

a) $z_0 = 2(= 2\,\mathrm{cis}(0°))$, $z_1 = 2\,\mathrm{cis}(120°)$ et $z_2 = 2\,\mathrm{cis}(-120°)(= 2\,\mathrm{cis}(240°))$.
Le triangle est équilatéral et inscrit dans le cercle de rayon 2 centré à l'origine.
Les nombres z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de $z^3 = 8$.

b) $f(z_1) = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1-\sqrt{3}\,i} = -1$ et $f(1+i) = \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

c) $f(z) = -1 \Longrightarrow z + 2 = -\overline{z}$; pour $z = x + yi$, cela donne $x + 2 + yi = -x + yi$,
d'où $x + 2 = -x \Longrightarrow x = -1$ et y peut valoir n'importe quoi.
On obtient donc la droite $x = \mathrm{Re}(z) = -1$.

d) $y = x \Longrightarrow u = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x}\,(\neq 0)$ et $v = \frac{2x(x+1)}{2x^2} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + u\,(\neq 1)$.
Il s'agit donc de la droite $v = 1 + u$, privée de $(0;1)$.

e) $u = 1 \Longrightarrow x^2 - y^2 + 2x = x^2 + y^2 \Longrightarrow 2x = 2y^2 \Longrightarrow x = y^2$: parabole ("couchée", privée de l'origine).

f) $x = -2 \Longrightarrow (u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = u^2 + u + \frac{1}{4} + v^2 = (\frac{-y^2}{4+y^2})^2 - \frac{y^2}{4+y^2} + (\frac{-2y}{4+y^2})^2 + \frac{1}{4}$

$$= \frac{y^4 - y^2(4+y^2) + 4y^2}{(4+y^2)^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Ces points se trouvent donc sur le cercle centré en $(-\frac{1}{2};0)$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$.

g) $f(z) = z$ n'a pas de solution $\Longrightarrow z + c = z\overline{z}$, ou $x + c + yi = x^2 + y^2$,

$$\text{ou} \begin{cases} y = 0 \\ x + c = x^2 + y^2 = x^2 \ \text{ n'a pas de solution} \end{cases}$$

$\Longrightarrow x^2 - x - c = 0$ a un discriminant négatif : $\Delta = 1 + 4c < 0 \Longrightarrow c < -\frac{1}{4}$.

Problème 4

a) $0.3 \cdot 0.15 \cdot 0.55 \cdot 3! = \frac{297}{2000} = 0.1485$.

b) $P(\mathrm{rrr}) + 3P(\mathrm{rrv}) + 3P(\mathrm{rrb}) + 3P(\mathrm{rvv}) = 0.55^3 + 3 \cdot 0.55^2 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.55 \cdot 0.15^2 \cong 0.6119$.

c) $\binom{10}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7 \cong 0.2668$.

d) $P(\text{au moins 1b en } n \text{ tirages}) = 1 - P(\text{aucune b en } n \text{ tirages}) = 1 - 0.7^n > 0.95$
$\Longrightarrow 0.7^n < 0.05 \Longrightarrow n \ln(0.7) < \ln(0.05) \Longrightarrow n > \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.7)} \cong 8.4$,
donc au moins 9 tirages.

e) e1) $0.7 \cdot 0.3 = 0.21$ e2) $0.3 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.657$
e3) $0.7^2 \cdot 0.3 + 0.7^5 \cdot 0.3 + 0.7^8 \cdot 0.3 + \cdots = 0.7^2 \cdot 0.3(1 + 0.7^3 + 0.7^6 + \cdots)$

$$= \frac{0.7^2 \cdot 0.3}{1 - 0.7^3} = \frac{49}{219} \cong 0.2237.$$

f) $P(\mathrm{bb}) + P(\mathrm{vv}) + P(\mathrm{rr}) = \frac{9}{100} + \frac{N^2}{10'000} + \frac{(70-N)^2}{10'000} = 0.09 + \frac{2N^2 - 140N + 4'900}{10'000} = 0.46$
$\Longrightarrow 2N^2 - 140N + 4'900 = 3700 \Longrightarrow N^2 - 70N + 600 = (N-10)(N-60) = 0$,
donc N vaut 10 ou 60.

g) $0.45 < P(\mathrm{r} \,|\, \text{pas v}) = \frac{P(\mathrm{r})}{P(\text{pas v})} = \frac{70-N}{100-N} < 0.55 \Longrightarrow 45 - 0.45N < 70 - N < 55 - 0.55N$.
On en tire $0.55N < 25 \Longrightarrow N < 45.\overline{45}$ et $0.45N > 15 \Longrightarrow N > 33.\overline{3}$;
il doit donc y avoir entre 34 et 45 billes vertes.