Exercice 1 (poids 3)

On appelle f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

a) Déterminer le domaine de définition et le zéro de f, ainsi que les asymptotes et le point à tangente horizontale du graphe de f. Dessiner le graphe de f dans un repère orthonormé.

b) Pour $k > 1$ on considère la surface fermée $\mathcal{S}$ délimitée par l'axe des x, le graphe de la fonction f et la droite verticale $x = k$. Déterminer la valeur de k afin que le corps de révolution obtenu en faisant tourner $\mathcal{S}$ autour de l'axe Ox ait un volume de 9π.

On appelle g la fonction donnée par $g(x) = f(x) + 1 - ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

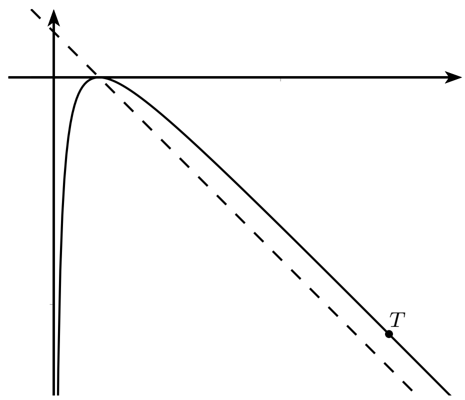
c) Pour quelles valeurs de a le graphe de la fonction g admet-il une intersection avec le graphe de f ? Donner, en fonction de a, les coordonnées du point de contact P.

d) Pour quelle valeur de a l'ordonnée du point P est-elle maximale ? Le tableau de variations n'est pas demandé.

On considère maintenant $a = 1$ et donc la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) + 1 - x.$$

Son graphe est représenté ci-contre avec son asymptote oblique $y = 1 - x$.



e) Le point T se trouve sur le graphe de g au-dessus de l'asymptote oblique et c'est le point le plus éloigné de cette asymptote. Déterminer son abscisse.

f) Résoudre l'équation différentielle $2x^2y' + xy = 2 \cdot \sqrt{x}$, puis trouver la solution particulière dont le graphe passe par le point $(e^2; 2e^{-1})$.

Exercice 2 (poids 3)

Dans l'espace V_3 muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$, on considère l'application linéaire f donnée par sa matrice

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & m & m+1 \\ m+1 & m-1 & m \\ m & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel.

On considère également les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$ est une base orthogonale de V_3.

b) Prouver que $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur propre de f et donner, en fonction de m, la valeur propre correspondante.

c) Le polynôme caractéristique de f est donné. Il peut s'écrire

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (3m-3)\lambda^2 + (9m-3)\lambda + 9m.$$

Montrer que seuls les multiples de $\overrightarrow{v_1}$ sont des vecteurs propres de f.

d) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{w_1} = f(\overrightarrow{v_1})$, $\overrightarrow{w_2} = f(\overrightarrow{v_2})$ et $\overrightarrow{w_3} = f(\overrightarrow{v_3})$ puis constater que $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ ne dépendent pas de m. Vérifier que $(\overrightarrow{w_1}; \overrightarrow{w_2}; \overrightarrow{w_3})$ est également une base orthogonale de V_3 si $m \neq 0$.

e) Montrer que les sous-espaces vectoriels V engendré par $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ et W engendré par $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ sont identiques.

Pour la fin du problème, on pose $m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

f) Montrer que $\dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{w_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{w_3}\|}{\|\overrightarrow{v_3}\|}$.
Calculer encore l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{w_2}$ ainsi que l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{w_3}$. Déduire des résultats obtenus une interprétation géométrique de l'application f.

g) Exprimer $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, puis donner la matrice F associée à f dans la base $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$.

h) Trouver la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ pour laquelle F^n est une matrice diagonale.

Exercice 3 (poids 2)

Première partie

Pour $z \neq 0$, on considère la fonction complexe f définie par $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{\overline{z}}$.

a) Calculer l'image par f de $z_0 = 3 + i$.

b) On pose $z = x + yi$ et $w = f(z) = u + vi$. Montrer que

$$u = \frac{-x}{x^2 + y^2} \text{ et } v = \frac{-3y}{x^2 + y^2}.$$

c) Déterminer l'image par la fonction f de la droite $d : x - 3y = 0$ sans l'origine.

d) Décrire l'ensemble des nombres complexes dont l'image par f se situe sur la droite $2v = 3$.

e) Expliquer pourquoi la fonction f ne possède pas de point fixe.

Deuxième partie

On considère maintenant la fonction g définie par $g(z) = -2i \cdot \overline{z}$.

f) Résoudre l'équation $\overline{g(z)} = \left(-1 + \dfrac{3}{2}i\right) z^2 - 1$.

g) Donner une description géométrique de la fonction g.

h) Calculer $(g \circ g)(z)$ et $(g \circ g \circ g)(z)$.

i) On définit $g^{(n)}(z) = \underbrace{(g \circ \cdots \circ g)}_{n \text{ fois}}(z)$. Trouver la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle

$$\left|g^{(n)}(1)\right| > 1000.$$

Exercice 4 (poids 2)

Sur un smartphone, une application F permet à un joueur de faire une partie d'échecs contre un ordinateur. Une partie se termine toujours par une victoire, un match nul ou une défaite. Quand Juliette joue, elle gagne une fois sur trois et perd une fois sur deux.

a) Juliette joue 10 parties.
— Quelle est la probabilité qu'elle fasse exactement trois matchs nuls ?
— Quelle est la probabilité qu'elle gagne au moins deux parties ?

b) Juliette joue jusqu'à ce qu'elle perde. Soit X le nombre de parties qu'elle effectue.
— Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = k)$
— Calculer la probabilité que X soit un multiple de 3.

Quand Gaston joue une partie d'échecs à l'aide de l'application F, il triche, ne perd jamais et gagne 9 fois sur 10. On suppose que Juliette et Gaston sont les uniques joueurs et qu'en moyenne, ils jouent le même nombre de parties.

c) Une personne vient de faire un match nul. Quelle est la probabilité que cette personne soit Juliette ?

d) Juliette et Gaston font chacun deux parties et comptent les points (trois points pour une victoire, un point pour un match nul et aucun point pour une défaite).
— Quel est le nombre moyen de points que Gaston obtient ?
— Quelle est la probabilité que Gaston obtienne exactement deux fois plus de points que Juliette ?

Vingt personnes jouent simultanément une partie sur cette application F.

e) Dans ce groupe, x personnes trichent et gagnent 9 fois sur 10. Les autres ont un niveau semblable et gagnent 3 fois sur 10. Un joueur vient de gagner une partie. La probabilité qu'il soit alors un tricheur vaut 0.9. Combien y a-t-il de tricheurs dans ce groupe ?

Exercice 1

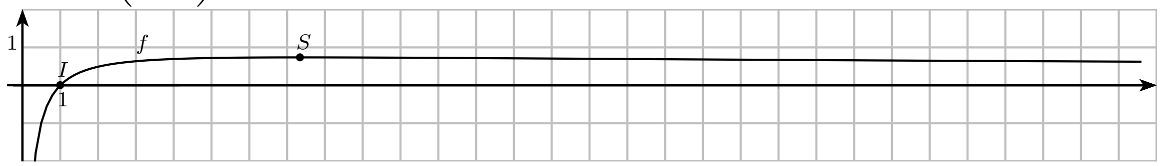
a) $D =]0; \infty[$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow$ Zéro en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 0 \Rightarrow$ Asymptote horizontale en $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -\infty \Rightarrow$ Asymptote verticale en $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} - \dfrac{\ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e^2$. Maximum en $S\left(e^2; \dfrac{2}{e}\right)$.



b) $V = 9\pi = \displaystyle\int_1^k \frac{\pi \ln^2(x)}{x} dx = \frac{\pi \ln^3(k)}{3} \Rightarrow k = e^3$.

c) $1 - ax = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{a} \in D$ si $a > 0 \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{a}; -\ln(a)\sqrt{a}\right)$.

d) $[-\ln(a)\sqrt{a}]' = \dfrac{-2\sqrt{a} - \ln(a)\sqrt{a}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{a}\,(2 + \ln(a))}{2a} = 0 \Rightarrow a = e^{-2}$.

e) $g'(x_t) = f'(x_t) - 1 = -1 \Rightarrow f'(x_t) = 0 \Rightarrow$ L'abscisse vaut $x_t = e^2$.

f) En posant $y = uv$, on obtient l'équation $u(2x^2v' + vx) + 2x^2u'v = 2\sqrt{x}$. Une solution de $2x^2v' + vx = 0$ est $v = e^{-0.5\ln(x)} = x^{-0.5}$. Pour trouver u, il faut encore résoudre $2x^2u' = 2x$. On obtient $u = \ln(x) + c$. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y = uv = \frac{\ln(x) + c}{\sqrt{x}}.$$

Si le graphe passe par le point $(e^2; 2e^{-1})$, on obtient $c = 0$ et la solution particulière de notre équation différentielle est

$$y = uv = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = f(x).$$

Exercice 2

a) $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. De plus $\overrightarrow{v_3} \perp \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3} \perp \overrightarrow{v_1}$ par définition du produit vectoriel.

b) $M\overrightarrow{v_1} = 3m \cdot \overrightarrow{v_1}$, donc $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur propre de valeur propre $3m$.

c) On sait que $3m$ est un zéro de $P(\lambda) = -\lambda^3 + (3m-3)\lambda^2 + (9m-3)\lambda + 9m$. En utilisant le schéma de Horner , on obtient

	-1	$3m-3$	$9m-3$	$9m$
$3m$	0	$-3m$	$-9m$	$-9m$
	-1	-3	-3	0

$P(\lambda) = (-\lambda^2 - 3\lambda - 3)(\lambda - 3m)$. La factorisation $P(\lambda)$ est complète, il n'y a pas d'autres valeurs propres car $\Delta = -3 < 0$.

d) $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 3m \\ 3m \\ 3m \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. La base $(\overrightarrow{w_1}; \overrightarrow{w_2}; \overrightarrow{w_3})$ est une base orthogonale car $\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{w_3} = 0$.

e) Les vecteurs $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_2} \wedge \overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont parallèles. Les sous-espaces V et W sont donc identiques. Le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ représente les sous-espaces V et W.

f) Pour $m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, on a $\dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\dfrac{\|\overrightarrow{w_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ et $\dfrac{\|\overrightarrow{w_3}\|}{\|\overrightarrow{v_3}\|} = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$.
Angle entre $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{-3}{\sqrt{12}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} = 150°$
Angle entre $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{-9}{\sqrt{108}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150°$
f est une rotation de 150° autour d'un axe parallèle à $\overrightarrow{v_1}$ suivie (ou précédée) d'une homothétie de facteur $\sqrt{3}$.

g) $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$ et $c = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{w_2} = -\dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{v_2} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v_3}$

$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = d = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{w_3} = -\dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{v_2} - \dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{v_3}$

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

h) Pour $n = 6$ l'angle vaut $6 \cdot 150° = 900°$. La matrice F^6 est diagonale car l'angle de rotation est un multiple de 180°. On a

$$F^6 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

a) $f(3+i) = \dfrac{1}{3+i} + \dfrac{2}{3-i} = \dfrac{3-i-2(3+i)}{10} = \dfrac{-3-3i}{10}$

b) $f(x+yi) = \dfrac{1}{x+yi} - \dfrac{2}{x-yi} = \dfrac{x-yi-2x-2yi}{x^2+y^2} = \underbrace{\dfrac{-x}{x^2+y^2}}_{=u} + \underbrace{\dfrac{-3y}{x^2+y^2}}_{=v} i$

c) $\dfrac{u}{v} = \dfrac{-x}{-3y} = \dfrac{-3y}{-3y} = 1$. L'image est la droite $u = v$ sans l'origine.

d) $v = \dfrac{3}{2} = \dfrac{-3y}{x^2+y^2} \Rightarrow 3x^2+3y^2+6y = 0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2-1 = 0$. La pré-image est un cercle privé de l'origine de centre $C(0;-1)$ et de rayon $r = 1$.

e) $f(z) = z \Rightarrow \dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{\overline{z}}$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire,on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-x}{x^2+y^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{-1}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = -1 \text{ Impossible!} \\ y = \dfrac{-3y}{x^2+y^2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{-3}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = -3 \text{ Impossible également!} \end{cases}$$

Comme l'un des nombres x ou y est non nul, l'une des deux (ou les deux) simplifications (1) et (2) est permise (sont permises).

f) On doit résoudre l'équation $\left(-1+\dfrac{3}{2}i\right) z^2 - 2iz - 1 = 0$. On obtient

$$\Delta = -4 + 4\left(-1+\frac{3}{2}i\right) = -8+6i = \omega^2 = r_\omega^2 \text{cis}(2\phi_\omega)$$

On obtient $\omega_{1,2} = \pm(1+3i)$ et donc

$$z_1 = \frac{2i+(1+3i)}{-2+3i} = 1-i \text{ et } z_2 = \frac{2i-(1+3i)}{-2+3i} = \frac{-1+5i}{13}$$

g) $g = \text{Hom}(O;2) \circ \text{Rot}(O;-90°) \circ \text{Sym}(y=0)$ ou $\text{Hom}(O;2) \circ \text{Sym}(y=-x)$ ou $\text{Hom}(O;-2) \circ \text{Sym}(y=x)$

h) $g(z) = 2\text{cis}(-90°)\overline{z}$
$g(g(z)) = 2\text{cis}(-90°)\overline{2\text{cis}(-90°)\overline{z}} = 4\text{cis}(-90°)\text{cis}(90°)z = 4z$
$g(g(g(z))) = -2i\overline{4z} = -8i\overline{z}$

i) $2^n > 1000 \Rightarrow n \geq 10$. La plus petite valeur pour n vaut 10.

Exercice 4

a) $\mathbb{P}(\text{3 matchs nuls}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \simeq 15.5\%$

$\mathbb{P}(\text{gagne au moins 2 parties}) = 1 - 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \simeq 89.6\%$

b) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\mathbb{P}(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ et $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\mathbb{P}(X \text{ est un multiple de } 3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$

c) $\mathbb{P}(\text{Juliette joue} \mid \text{match nul}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{20}} = \frac{5}{8} = 62.5\%$

d) Nombre moyen de points $= 2(0.9 \cdot 3 + 0.1 \cdot 1) = 5.6$ points

$\mathbb{P}(\text{exactement 2 fois plus de points}) = \frac{81}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{18}{100} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{6} = \frac{166}{600} \simeq 27.7\%$

e) $\mathbb{P}(p \text{ est un tricheur} \mid p \text{ gagne}) = \frac{9}{10} = \frac{\frac{9x}{200}}{\frac{9x}{200} + \frac{20 - x}{20} \cdot \frac{3}{10}} \Rightarrow x = 15$ tricheurs