Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 4)

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = x^2 \cdot (\ln(x) - c)$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

a) Montrer que f possède un seul zéro et déterminer ce zéro en fonction de c.

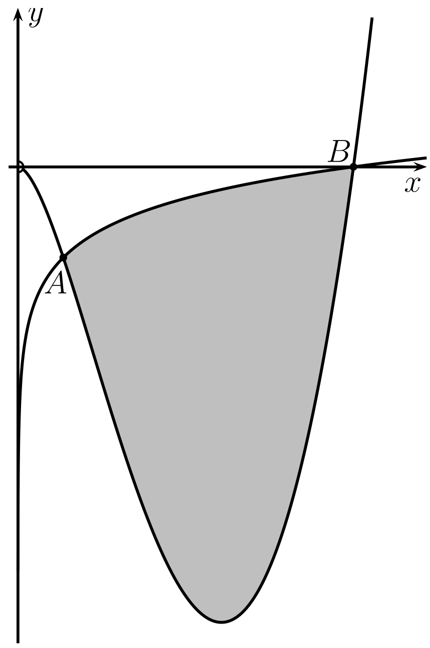
b) Déterminer, en fonction de c, l'abscisse du point à tangente horizontale du graphe de f.

Pour la suite du problème, on choisit $c = 2$, de sorte que $f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) - 2)$.

c) Étudier la fonction f (domaine, zéro, signe, comportement de y lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to +\infty$, coordonnées du point à tangente horizontale et variation de f).
Remarque : on ne demande pas le graphe puisqu'il est représenté ci-dessous.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et g données par

$$f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) - 2) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - 2.$$



d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B des deux graphes.

e) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f et une équation de la tangente au graphe de g au point A.
Calculer la valeur de l'angle obtus formé par ces tangentes.

f) En employant la méthode d'intégration par parties, trouver une primitive F de la fonction f.

g) Donner une primitive G de la fonction g.

h) Calculer l'aire de la surface fermée (grisée) délimitée par les graphes de f et g.

Problème 2 (poids 3)

Pour les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée.
Dessiner les parties invisibles en traitillé et utiliser plusieurs couleurs.

On donne les plans $\pi : 2x + y + 2z - 10 = 0$ et $\alpha : z - 3 = 0$.

a) Dessiner les traces des plans π et α.

b) Dessiner la droite d'intersection i des plans π et α ainsi que sa projection dans le sol.

c) Déterminer des équations paramétriques de la droite i.

On considère la droite $d : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$.

d) Calculer l'angle aigu φ formé par la droite d et le plan π.

e) Soit le point $A(1; 2; 3)$. Trouver une équation cartésienne du plan β contenant le point A et la droite d.

On considère maintenant la sphère $\mathcal{S} : (x - k)^2 + (y - k)^2 + (z - k)^2 = k^2$ où k est un nombre réel strictement positif.

f) Quelle est la position relative de cette sphère par rapport au sol, au mur et à la paroi ?

g) Trouver la (ou les) valeur(s) de k telle(s) que cette sphère soit tangente au plan π.

La sphère $\mathcal{S}' : x^2 + y^2 + z^2 = 25$ coupe un plan μ parallèle à π selon un cercle de centre C et de rayon 4.

h) Trouver le centre C de ce cercle ainsi qu'une équation cartésienne du plan μ.
Il y a deux réponses possibles, donner celle pour laquelle toutes les coordonnées de C sont positives.

Problème 3 (poids 3)

Sur un dé normal à six faces, James a remplacé le 6 par un 5.
Les faces du dé sont donc 1, 2, 3, 4, 5 et 5.

a) James lance son dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 5 ?

b) James lance son dé dix fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement trois fois le chiffre 5 ?

c) James lance son dé trois fois. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit supérieure à 13 ?

d) Combien de fois James doit-il lancer son dé pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une fois 5 soit supérieure à 97% ?

James a effectué une série de 100 lancers ; les résultats sont les suivants.

face du dé	1	2	3	4	5
effectif	19	14	17	15	35

e) Calculer la moyenne, la médiane et l'écart-type de cette série.

James a rendez-vous avec son ami Georges pour une partie de dés. James est toujours ponctuel, ce qui n'est pas le cas de Georges, qui est souvent en retard.
Soit h_1 l'heure d'arrivée de James et h_2 l'heure d'arrivée de Georges. La différence $h_2 - h_1$, exprimée en minutes, est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 4 minutes et d'écart-type 2 minutes.

f) Quelle est la probabilité que James doive attendre entre 5 et 6 minutes ?

g) Quelle est la probabilité que Georges arrive avant James ?

Lorsque Georges arrive avec son dé traditionnel à six faces numérotées de 1 à 6, James et Georges mettent leur dé dans un sac.

h) Georges tire au hasard un dé, le lance et obtient 5. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le dé de James ?

Georges lance son dé, il note le résultat obtenu et répète l'opération une deuxième fois, puis c'est au tour de James de faire de même avec son propre dé. On obtient ainsi un nombre à quatre chiffres.

i) Combien y a-t-il de nombres possibles ?

j) Parmi tous ces nombres, combien sont formés de quatre chiffres différents ?

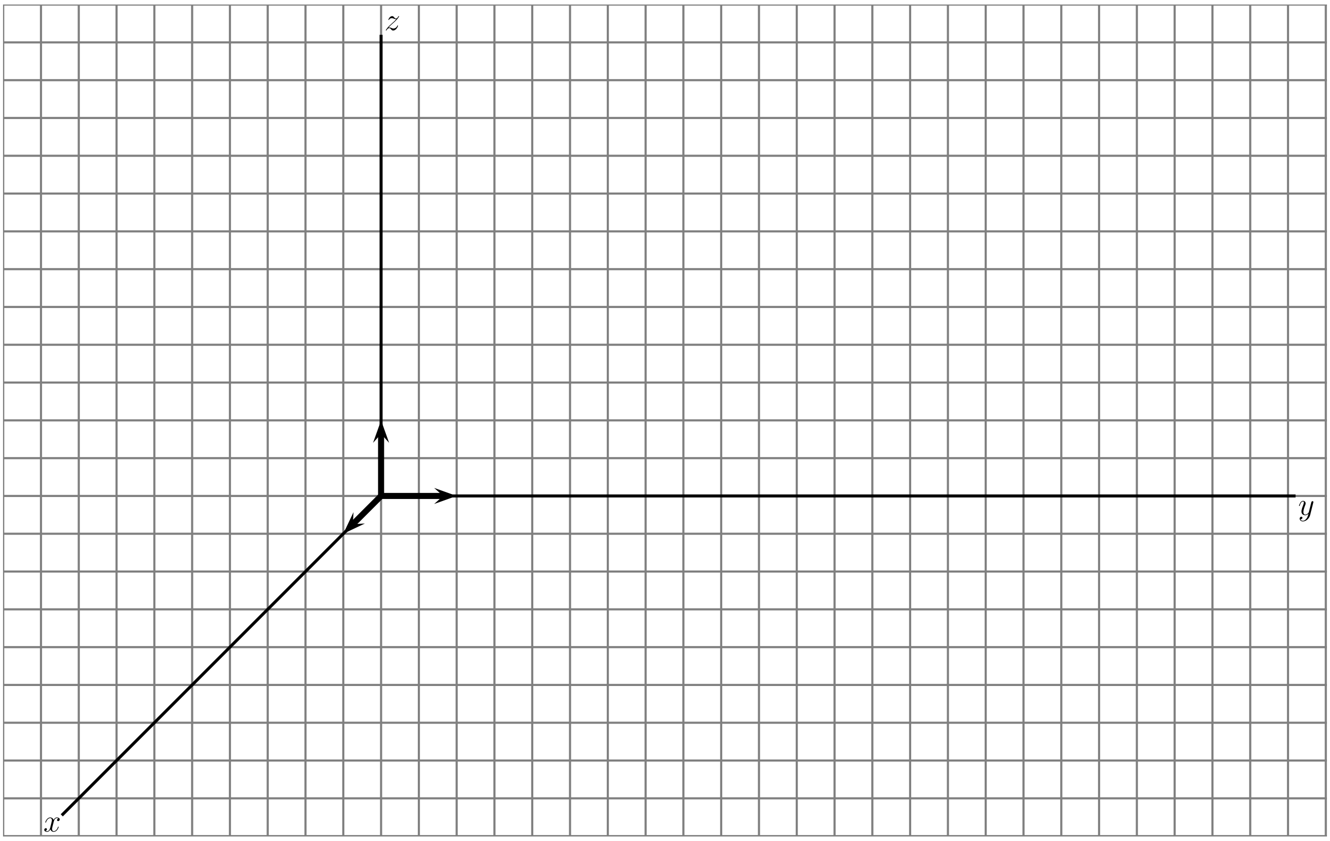
LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Session 2017

Mathématiques niveau I

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....   Classe : ....



Problème 1

a) $x = 0$ n'est pas possible car hors du domaine ; donc $x = e^c$ est le seul zéro.

b) $f'(x) = 2x(\ln(x) - c) + x = x(2\ln(x) - 2c + 1) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = \frac{2c-1}{2}$
donc $x = e^{\frac{2c-1}{2}} = e^{c-\frac{1}{2}} = \frac{e^c}{\sqrt{e}}$ $(x \neq 0)$.

c) $D = \mathbb{R}_{>0} =]0; \infty[$; zéro $x = e^2 \cong 7.39$;

x	0		e^2	
y	$\lightning$	$-$	0	$+$

;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (x^2 l'emporte), il y a donc un (demi-)trou à l'origine ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$H(e^{3/2}; -\frac{1}{2}e^3)$ soit environ $(4.48; -10.04)$;

x	$\to 0$		$e^{3/2}$	
y'	$\to 0$	$-$	0	$+$
y	(tan.hor.)	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

.

d) $f(x) = g(x) \Longrightarrow (x^2 - 1)(\ln(x) - 2) = 0 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x_1 = 1$ et $x_2 = e^2$,
donc $A(1; -2)$ et $B(e^2; 0)$.

e) $t_f : y = m_1 x + h_1$ où $m_1 = f'(1) = -3$, d'où $h_1 = -2 + 3 = 1$, donc $t_f : y = -3x + 1$;
$t_g : y = m_2 x + h_2$ où $m_2 = g'(1) = 1$, d'où $h_2 = -2 - 1 = -3$, donc $t_g : y = x - 3$;
$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\tan(\alpha_1) = 3$ et $\tan(\alpha_2) = 1$, donc $\varphi \cong 71.57° + 45° = 116.57°$.

f) $F(x) = \displaystyle\int x^2(\ln(x) - 2)dx = \frac{x^3}{3}(\ln(x) - 2) - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}(3\ln(x) - 7)$.

g) $G(x) = x(\ln(x) - 1) - 2x = x(\ln(x) - 3)$.

h) $A = \Big[G(x) - F(x)\Big]_1^{e^2} = -e^2 + 3 + \frac{e^6}{9} - \frac{7}{9} = \frac{e^6}{9} - e^2 + \frac{20}{9} \cong 39.66$.

Problème 3

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\binom{10}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^7 \cong 26.01\%$.

c) $P(\text{“555”}) + 3P(\text{“455”}) = (\frac{1}{3})^3 + 3 \cdot \frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{27} + \frac{1}{18} = \frac{5}{54} \cong 9.26\%$.

d) $P(\text{au moins un 5 en } n \text{ lancers}) = 1 - P(\text{aucun 5 en } n \text{ lancers}) = 1 - (\frac{2}{3})^n > 0.97$
$\Longrightarrow (\frac{2}{3})^n < 0.03 \Longrightarrow n\log(\frac{2}{3}) < \log(0.03) \Longrightarrow n > \frac{\log(0.03)}{\log(\frac{2}{3})} \cong 8.65$,
il doit donc lancer son dé au moins 9 fois.

e) $\overline{x} = \frac{333}{100} = 3.33$; $\widetilde{x} = 3.5$; $\sigma^2 = \frac{1343}{100} - 11.0889 = 2.3411 \Longrightarrow \sigma \cong 1.53$.

La variable $X^* = \frac{X-4}{2}$ suit la loi normale centrée réduite.

f) $P(5 \leqslant X \leqslant 6) = P(0.5 \leqslant X^* \leqslant 1) = \phi(1) - \phi(0.5) \cong 0.8413 - 0.6915 = 14.98\%$.

g) $P(X < 0) = P(X^* < -2) = 1 - P(X^* \leqslant 2) = 1 - \phi(2) \cong 1 - 0.9772 = 2.28\%$.

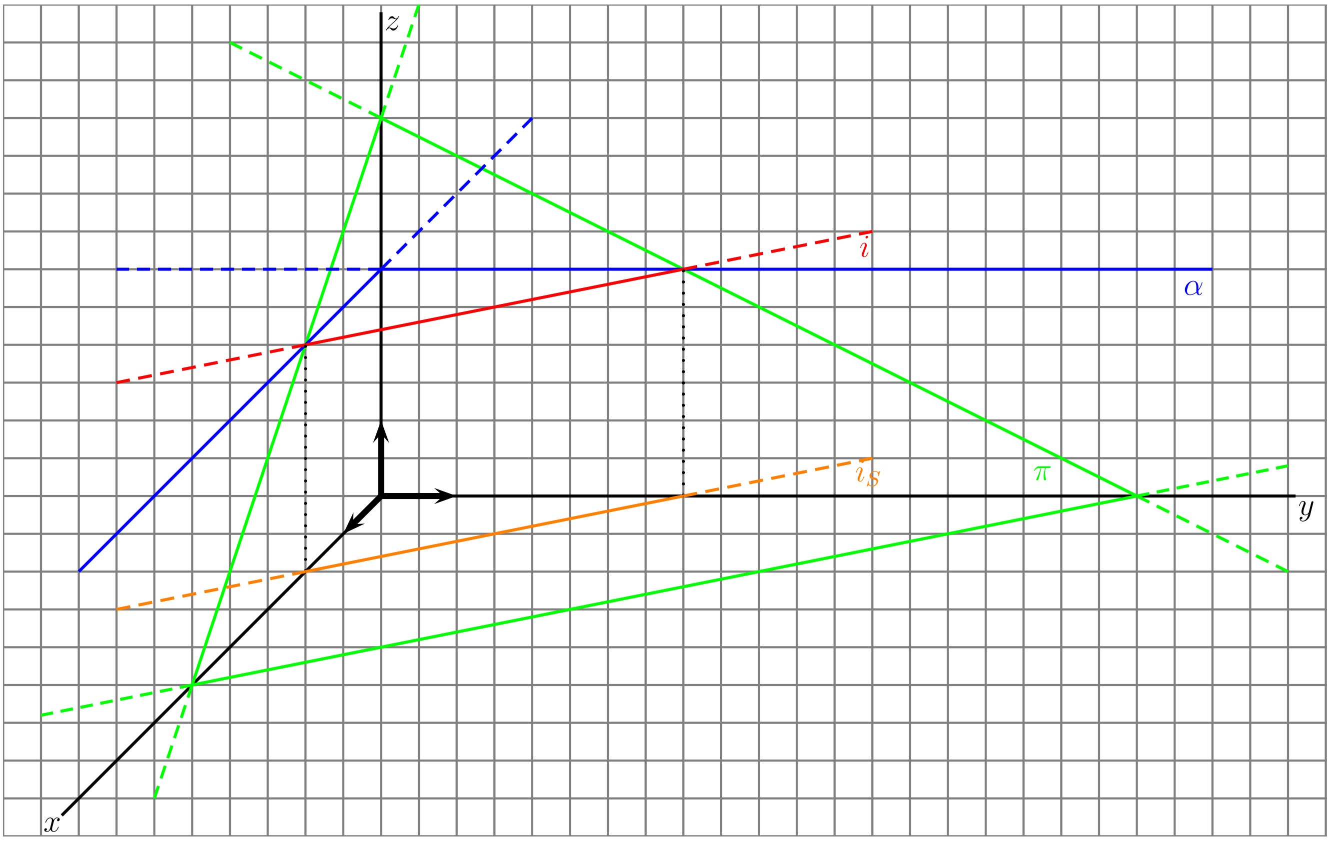
h) $P(\text{dé de James} \,|\, 5) = \frac{P(\text{dé de James } \underline{\text{et}} \text{ 5})}{P(5)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{2}{3}$.

i) $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 900$.

j) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$.

Problème 2

a) et b) $\pi : I_x(5;0;0), I_y(0;10;0), I_z(0;0;5)$; $\quad \alpha$ est horizontal et coupe Oz en $(0;0;3)$.



c) Vecteur directeur de i : $\overrightarrow{d_i} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ - ou alors $\overrightarrow{d_i} \,/\!/\, \overrightarrow{I_xI_y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$... -

et i passe par $P_M(0;4;3)$ (ou $P(2;0;3)$ ...), $\quad$ donc $i : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ (par exemple).

d) $\overrightarrow{n_\pi} \bullet \overrightarrow{d} = 3 = \|\overrightarrow{n_\pi}\| \|\overrightarrow{d}\| \cos(\psi) \Longrightarrow \cos(\psi) = \frac{1}{\sqrt{11}}$ et $\varphi = 90° - \psi \cong 17.55°$.

e) On a $A'(-1;1;4) \in \beta$, d'où les vecteurs directeurs $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ de β, et le vecteur normal $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; donc $\beta : 2x + y + 5z - 19 = 0$.

f) Le centre $M(k;k;k)$ de $\mathcal{S}$ est à distance $r = k$ du sol, du mur et de la paroi, donc $\mathcal{S}$ est tangente aux trois plans de référence.

g) $\delta(M;\pi) = \frac{|2k+k+2k-10|}{3} = r = k \Longrightarrow |5k - 10| = 3k$, $\quad$ d'où deux possibilités :
1) $5k - 10 = 3k \Longrightarrow k = 5$ $\quad$ et $\quad$ 2) $5k - 10 = -3k \Longrightarrow k = \frac{5}{4}$.

h) Le vecteur $\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{OC}$ est parallèle à $\overrightarrow{n_\pi}$ et de longueur 3 :
$\left\| \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \right\| = 3 \Longrightarrow 9\lambda^2 = 9 \Longrightarrow \lambda^2 = 1.$
Pour avoir des coordonnées positives, il faut prendre $\lambda = 1$ et on trouve $C(2;1;2)$.
Le plan μ est parallèle à π et contient C, donc $\mu : 2x + y + 2z - 9 = 0$.