Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

Une image en nuances de gris de taille 200x200 est placée sur *Picture1*.
Rappel : les 3 composantes couleur (r, g, b) d'un pixel gris ont la même valeur.

Partie 1

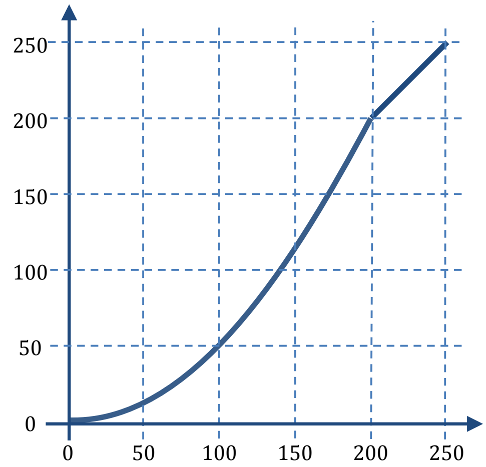
On veut modifier la luminosité de cette image en utilisant la fonction f tracée ci-contre. Son graphe est constitué d'un arc de parabole dont le sommet est à l'origine, puis d'un segment de droite.

Écrire l'expression fonctionnelle de f.

En abscisse on lit la nuance de gris initiale et en ordonnée la nuance de gris après modification.

Cette modification rend-elle l'image plus claire ou plus sombre ?

Écrire le code qui permet de modifier la luminosité de cette image selon cette fonction f. L'image modifiée sera placée sur $Picture2$.

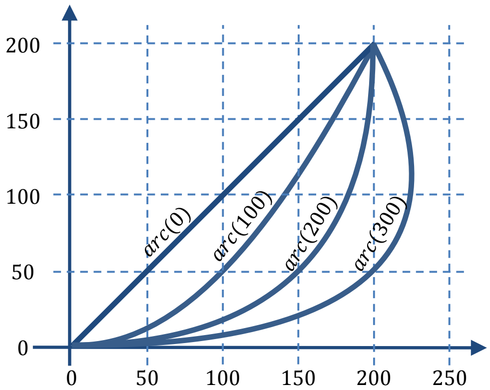


Partie 2

On considère les arcs $arc(k)$, $(k \in \mathbb{N})$ donnés par

$$arc(k): \begin{cases} x = (200 - 2k)t^2 + 2kt \\ y = 200t^2 \end{cases}, t \in [0; 1]$$

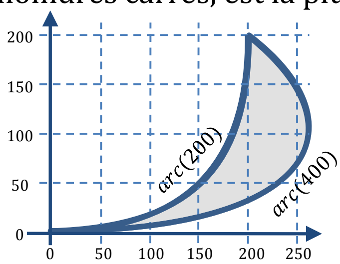
Quatre arcs sont représentés ci-contre : $arc(0)$, $arc(100)$, $arc(200)$ et $arc(300)$.



a) Le point $(180; 100)$ n'appartient à aucun de ces arcs. Il est situé entre deux arcs consécutifs $arc(m)$ et $arc(m+1)$. Déterminer la valeur de $m \in \mathbb{N}$.

b) Pour $k \geq 200$ l'arc possède un point à tangente verticale. Déterminer la valeur de k telle que ce point corresponde à $t = \frac{3}{4}$ et en donner les coordonnées.

c) Les points $A(0; 0)$, $B(80; 50)$ et $C(200; 200)$ sont sur $arc(60)$.
On cherche la parabole d'équation $y = ax^2$ qui, au sens des moindres carrés, est la plus proche de ces trois points. Trouver a.



d) Écrire un programme qui affiche sur *Label1* une estimation de l'aire de la surface comprise en $arc(200)$ et $arc(400)$.

e) Par des compressions horizontales de l'image initiale (les ordonnées des points ne sont pas modifiées) on obtient l'image suivante, sur $Picture3$ de taille 300x200.
Une image est sur la gauche de $arc(200)$ et l'autre est entre $arc(200)$ et $arc(400)$.
Écrire le code qui permet d'obtenir ce résultat.

Problème 2

On considère la trajectoire d'un point P dans le plan. Cette trajectoire est donnée par deux fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ avec $t \in [0; 3]$.

Les fonctions x et y satisfont le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = 2y - t + 2 \\ y'(t) = 2t - 2x \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 1$.

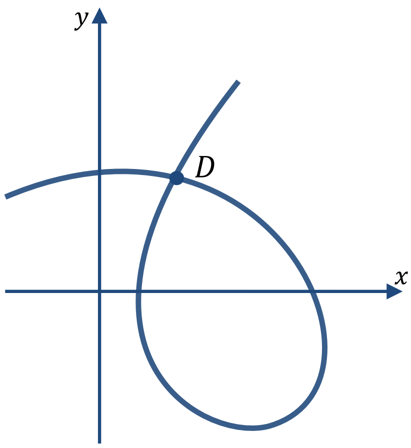
a)
- Vérifier que le vecteur vitesse en $t = 0$ est $\vec{v}(0) = \binom{4}{2}$.
- Estimer la position et le vecteur vitesse en $t = \frac{1}{3}$ avec la méthode d'Euler et un pas $h = \frac{1}{3}$.
- On approche la fonction $y = y(t)$ par le polynôme $p(t) = at^2 + bt + c$ tel que $p(0) = y(0)$ et $p'(0) = y'(0)$.
  Trouver les coefficients b et c, puis utiliser l'estimation du vecteur vitesse en $t = \frac{1}{3}$ pour trouver le coefficient a.
- Calculer une estimation de la valeur de t pour laquelle la fonction y s'annule.

b) L'expression fonctionnelle de la fonction x est

$$x(t) = t - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\sin(2t) - \frac{3}{4}\cos(2t)$$

En effectuant un pas de la méthode de Newton à partir de la graine $t_0 = \frac{\pi}{8}$, trouver une estimation d'un zéro de la fonction x.

Pour $t \in [0; 3]$ la trajectoire est la suivante.



c) On appelle t_1 et t_2 les valeurs de t pour lesquelles la courbe présente un point à tangente verticale.
Écrire un programme qui détermine des estimations de t_1 et t_2 en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{128}$.

d) Écrire le code d'une fonction $y = g(t)$ qui estime la fonction $y = y(t)$ en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{128}$.

e) La courbe présente un point double D.
En supposant que les coordonnées des points de la courbe sont données par deux fonctions $x = f(t)$ et $y = g(t)$ déjà programmées, écrire un programme qui estime les coordonnées du point double.

Problème 3

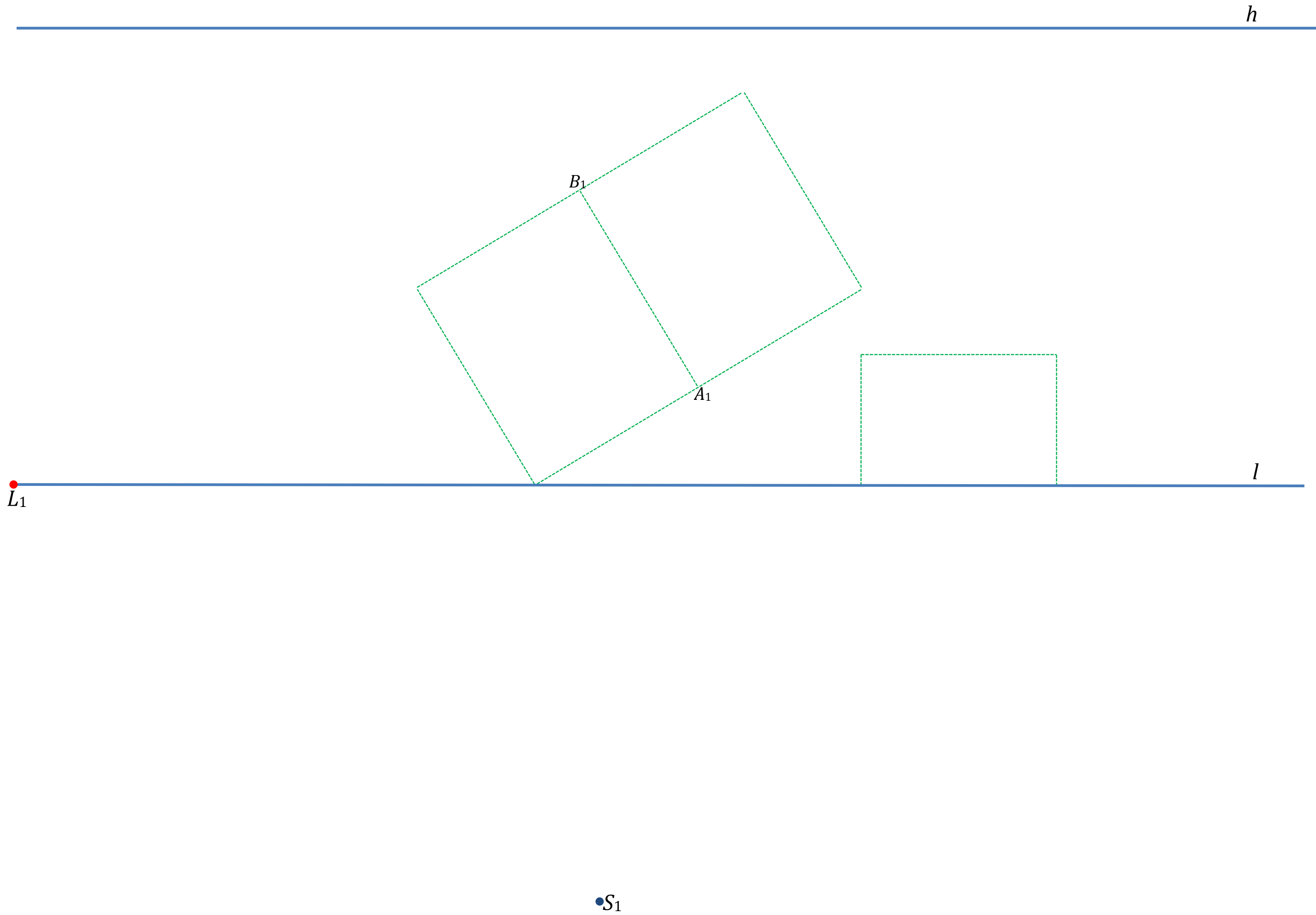
Construire la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l de la maquette d'une maison à toit à 2 pans donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du faîte du toit (AB) est de 4 cm, celle des façades latérales est de 2 cm. La droite h est la ligne d'horizon.

Construire encore la perspective de la maquette d'un garage de forme parallélépipédique rectangle donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du garage est de 1 cm.

La scène est éclairée par une source lumineuse ponctuelle située à 11cm de haut et donnée par L_1.

Construire la perspective de l'ombre de la maison et du garage sur le sol.

Construire la perspective de l'ombre de la maison sur le garage en précisant la démarche.



Problème 1

1re partie

Rend l'image plus sombre

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 & \text{si } x \in]200; 250 \\ x & \text{si } x \in]200; 250] \end{cases}$$

```
For x = 0 To 199
  For y = 0 To 199
    Let C = Picture1.Point(x,y)
    Let gr = Int(C / 256 ^ 2)
    If gr <=200 then Let gr = gr ^ 2 / 200
    Picture2.Pset(x,y), RGB(gr,gr,gr)
  Next y
Next x
```

2me partie

a) $y = 100 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 180 \Rightarrow (200 - 2k)\frac{1}{2} + 2k\frac{\sqrt{2}}{2} = 180 \Rightarrow k(\sqrt{2} - 1) = 80 \Rightarrow m = 193.$

b) $x'(t) = (400 - 4k)t + 2k, x'\left(\frac{3}{4}\right) = 300 - k, x'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow k = 300 \Rightarrow \begin{cases} x = -400t^2 + 600t \\ y = 200t^2 \end{cases}$

$t = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 225, y = 112{,}5.$

c) $d(a) = (6400a - 50)^2 + (40000a - 200)^2$
$d'(a) = 12800(6400a - 50) + 80000(40000a - 200)$
$d'(a) = 0 \Rightarrow 12800(6400a - 50) + 80000(40000a - 200) = 0 \Rightarrow 328192a = 1664$
$\Rightarrow a \cong 0{,}00507$

d)
```
Let ay = 0: s = 0
For t = 0 To 1 Step 1 / 1024
  Let y = 200 * t ^ 2
  Let X1 = -200 * t ^ 2 + 400 * t
  Let X2 = -600 * t^2 + 800 * t
  Let dx = X2 - X1
  Let dy = y - ay
  Let s = s + dx * dy
  Let ay = y
Next t
Label1.Caption = Format(s, "0.00")
```

Remarque1 : la méthode des « rectangles » est utilisée dans le programme, celle des « trapèzes », guère plus compliquée fournit un bien meilleur résultat.

Remarque2 : on peut « facilement » calculer la valeur exacte et obtenir 13333,33…

e)
```
For y = 0 to 199
  Let t = Sqr((200 - y) / 200)
  Let x1 = -200 * t^2 + 400 * t
  Let x2 = -600 * t^2 + 800 * t
  Let k1 = x1 / 200
  Let k2 = (x2 - x1) / 200
  For x = 0 To 199
    Let C = Picture1.Point(x,y)
    Let nx1 = k1 * x
    Let nx2 = x1 +k2 *x
    Picture3.Pset(nx1,y),C
    Picture3.Pset(nx2,y),C
  Next x
Next y
```

Problème 2

a) • $x'_0 = 2y_0 - t_0 + 2 = 4, y'_0 = 2t_0 - 2x_0 = 2.$

•

t	x	y	x'	y'
0	-1	1	4	2
$\frac{1}{3}$	$-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$	$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$	$2\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+2=5$	$2\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}=0$

• $p(t) = at^2 + bt + c, p(0) = 1 \Rightarrow c = 1, p'(0) = 2 \Rightarrow b = 2, p'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow a = -3.$

• $p(t) = -3t^2 + 2t + 1, p(t) = 0 \Rightarrow t = 1$ (et $t = -\frac{1}{3}$).

b) $N(t) = t - \frac{t-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sin(2t)-\frac{3}{4}\cos(2t)}{1+3\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(2t)}, N\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\frac{\pi-2}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}}{1+\frac{9\sqrt{2}}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi-2+3\sqrt{2}}{8+18\sqrt{2}} \cong 0{,}232.$

c)
```
Let t = 0 : x = -1 : y = 1 : xp = 4 : yp = 2 : h = 1 / 128 : t1 = 0
Do
  Let t = t + h : x = x + h * xp : y = y + h * yp
  Let axp = xp
  Let xp = 2 * y - t + 2 : yp = 2 * t - 2 * x
  If sgn(axp) <> sgn(xp) then
    If t1 = 0 Then Let t1 = t - h / 2 else Let t2 = t - h / 2
  End if
Loop until t >= 3
```

d)
```
Function g(tf)
  Let t = 0 : x = -1 : y = 1 : xp = 4 : yp = 2 : h = 1 / 128
  Do
    Let t = t + h : x = x + h * xp : y = y + h * yp
    Let xp = 2 * y - t + 2 : yp = 2 * t - 2 * x
  Loop Until t >= tf
  Let g = y
End Function
```

e) `t1` et `t2` ont été calculé au point c)
```
Let distmin = (f(0) - f(3)) ^ 2 + (g(0) - g(3)) ^ 2
For tt1 = 0 To t1 Step 1 / 128
  For tt2 = t2 To 3 Step 1 / 128
    Let d = (f(tt1) - f(tt2)) ^ 2 + (g(tt1) - g(tt2)) ^ 2
    If d < dmin Then
      dmin = d
      xd = f(tt1): yd = g(tt2)
    End If
  Next tt2
Next tt1
```

Problème 3

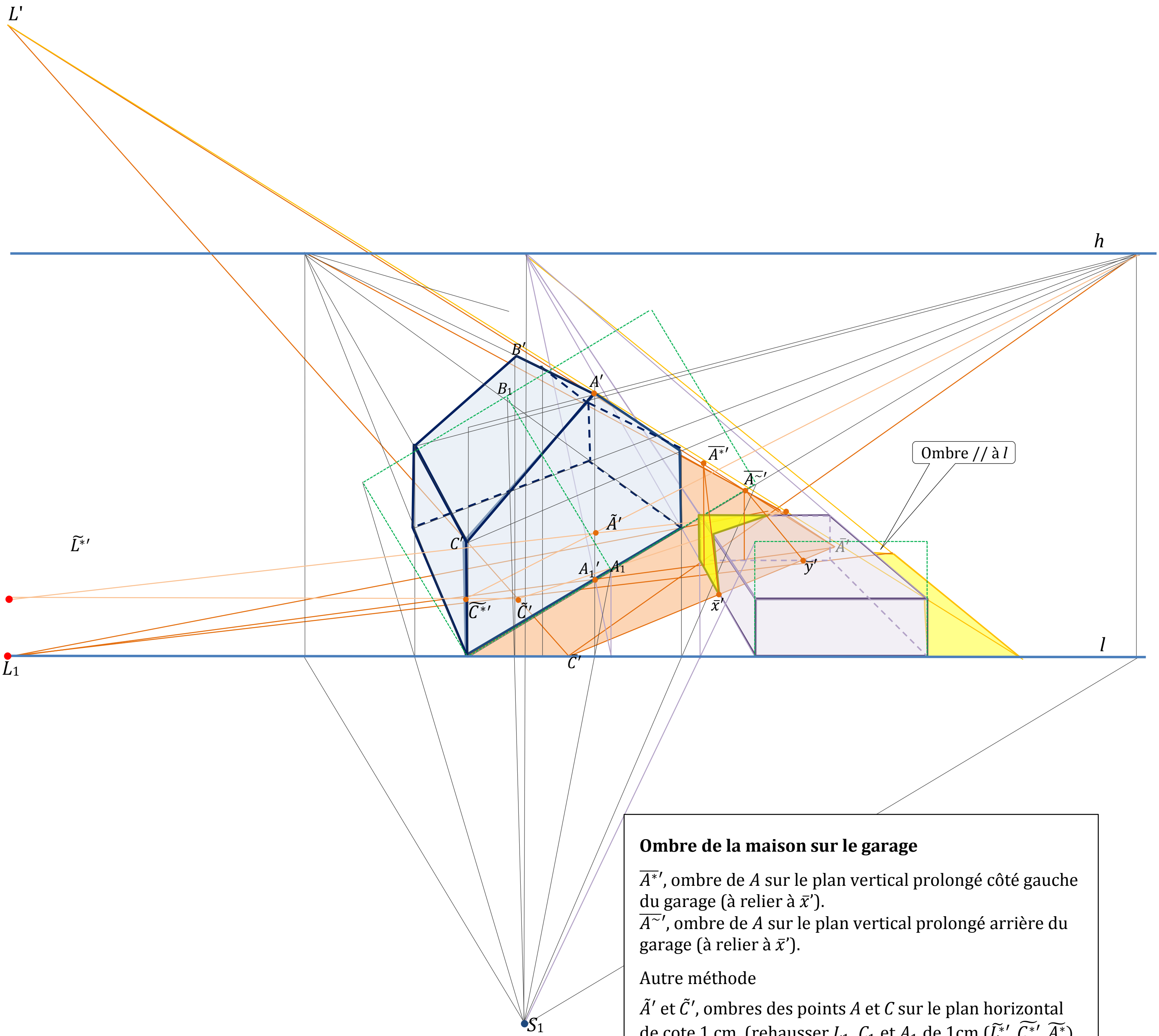
Construire la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l de la maquette d'une maison à toit à 2 pans donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du faîte du toit (AB) est de 4 cm, celle des façades latérales est de 2 cm. La droite h est la ligne d'horizon.

Construire encore la perspective de la maquette d'un garage de forme parallélépipédique rectangle donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du garage est de 1 cm.

La scène est éclairée par une source lumineuse ponctuelle située à 11cm de haut et donnée par L_1.

Construire la perspective de l'ombre de la maison et du garage sur le sol.

Construire la perspective de l'ombre de la maison sur le garage en précisant la démarche.



Ombre de la maison sur le garage

$\overline{A^{*}}'$, ombre de A sur le plan vertical prolongé côté gauche du garage (à relier à $\bar{x}$').
$\overline{A^{\sim}}'$, ombre de A sur le plan vertical prolongé arrière du garage (à relier à $\bar{x}$').

Autre méthode

$\tilde{A}'$ et $\tilde{C}'$, ombres des points A et C sur le plan horizontal de cote 1 cm. (rehausser L_1, C_1 et A_1 de 1cm ($\widetilde{L^{*}}'$, $\widetilde{C^{*}}'$, $\widetilde{A^{*}}$),
$\tilde{C}' = \widetilde{L^{*}}'\widetilde{C^{*}}' \cap L'C'$, $\tilde{A}' = \widetilde{L^{*}}\widetilde{A^{*}}' \cap L'A'$.
La droite $\tilde{A}'\tilde{C}'$détermine l'ombre de la maison sur le toit du garage.

Barème indicatif

Problème 1	20 points
1)	5 (2 1 2)
2a)	2
2b)	2
2c)	3
2d)	4
2e)	4
Problème 2	20 points
a)	6 (1 2 2 1)
b)	3
c)	4
d)	3
e)	4
Problème 3	20 points
Maison	5
Garage	2
Ombre maison sur le sol	6 (1 pour L')
Ombre garage sur le sol	2
Ombre maison sur garage	4
Soin	1

> Les notes de l'expert et du titulaire sont calculées au centième, la note finale au demi.
>
> Sous enveloppe aux experts :
>
> - le barème, la pondération des exercices et la répartition des points par question;
> - une liste des élèves avec la note finale, au centième, de l'examen écrit.

Total points

Note $n = 1 + 5\,\frac{\text{nb points}}{60}$ arrondie au quart de point