Département de la formation et de la sécurité
Service de l'enseignement

Departement für Bildung und Sicherheit
Dienststelle für Unterrichtswesen

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2016

Mathématiques Fortes	DF	5B - 5C - 5D	Version A

Exercice 1

Soit la fonction donnée par $f(x) = (x-2)^2\, e^{-\frac{x}{3}}$

1. Effectuer l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique.
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f et l'axe O_x pour $x \geqslant 2$.
3. Déterminer les coordonnées des points de la courbe en lesquels la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine du repère.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K), considérons :

les plans $\alpha\ :\ 2x - y - 4z = 20$ et $\beta :\ x + 3y - 4z = 6$

ainsi que la sphère $\Sigma\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 18z = 95$

1. Calculer, en radians et en degrés, l'angle aigu φ formé par l'axe (OI) et le plan α .
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\alpha \cap \Sigma$.
3. Déterminer les équations paramétriques de la droite $d = \alpha \cap \beta$.
4. Déterminer l'équation cartésienne du plan γ parallèle à l'axe (OK) et contenant la droite d .
5. Donner le point de l'axe (OK) le plus proche de la droite d .

Exercice 3

On définit une fonction complexe par $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ et on nomme T_f la transformation du plan de Gauss associée.

1. Déterminer les images de $z_1 = 1 + 2\,i$, de $z_2 = i$ et de $z_3 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$ par f.
2. Montrer que les points $A\,(1 + 2\,i), B(i)$ et $C\,\left(-\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)$ sont alignés. Leurs images par T_f le sont-elles aussi ? Justifier.
3. Déterminer les points fixes de T_f .
4. Si $f(x + y\,i) = x' + y'\,i$, donner x' et y' en fonction de x et de y.
5. Déterminer l'image par T_f de l'axe réel et de l'axe imaginaire.
6. Quels points du plan ont leur image par T_f sur l'axe imaginaire ?

Exercice 4

1. Dans l'ensemble $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, considérons l'ensemble $E = \{\ ax^2 + b \mid a, b \in \mathbb{R}\ \}$.

   Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$, en déterminer la dimension et en donner une base.

2. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   a. Déterminer $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ et donner leur dimension ; donner également une base de $\mathrm{Ker}(h)$ et une base de $\mathrm{Im}(h)$.

   b. Déterminer les valeurs propres de h.

   c. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ relativement à laquelle la matrice de h est diagonale ; donner également cette nouvelle matrice M' de h.

FIN

Bon travail !