GYMNASE DE NYON **Session de juin 2016**

Mathématiques

(Niveau renforcé)

Examen de maturité **Durée :** 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice (sans couvercle) parmi les modèles suivants :
TI 30 ECO RS, TI 30 XII S, TI 30 XII B, Casio Fx 82 solaire;
formulaire officiel mis à disposition ;
Formulaires et tables CRM mis à disposition.

Problème 1 (14 points)

Effectuer l'étude complète de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ selon le plan du formulaire en page 8.

Problème 2 (12 points)

Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les valeurs propres de A (on doit trouver $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$).

b) Déterminer les espaces propres E_1 et E_{-1} associés à ces valeurs propres. Préciser leurs dimensions.

c) Déterminer une matrice diagonale D et calculer des matrices P et P^{-1} telles que $D = P^{-1}AP$.

d) Caractériser géométriquement l'application linéaire.

Problème 3 (11 points)

Les règles d'un jeu de hasard sont les suivantes. Le joueur dispose de neuf cartes (faces cachées et mélangées) : trois as, trois dames et trois valets. Il tire une carte au hasard. Si la carte est un valet, le joueur a perdu et le jeu s'arrête. Si la carte est un as, le joueur a gagné et le jeu s'arrête. Si la carte est une dame, le joueur retire au hasard une carte parmi les cartes restantes et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde ou gagne.

a) Montrer que la probabilité que le joueur perde en tirant exactement trois cartes est de 1/28.

b) Calculer la probabilité que le joueur tire exactement trois cartes et que le jeu s'arrête.

c) Montrer que le joueur a une chance sur deux de perdre.

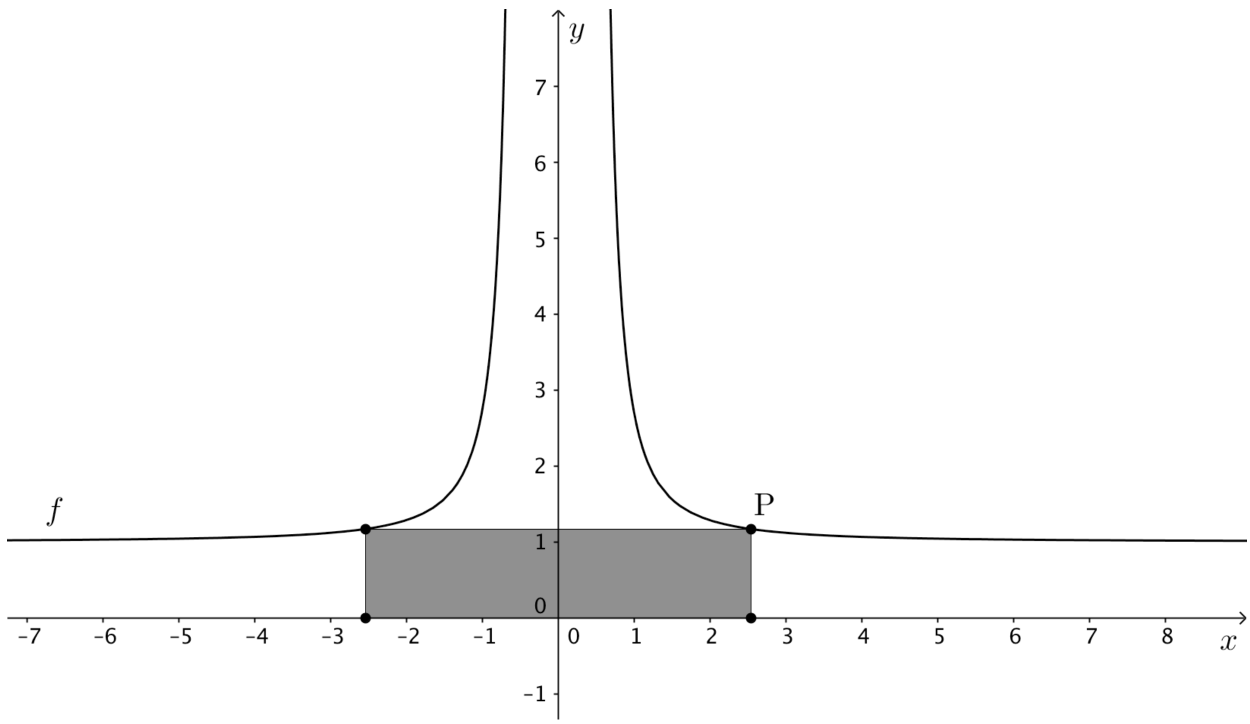
d) Calculer la probabilité que, parmi les cartes restantes, il reste au moins deux dames, sachant que le joueur a perdu.

e) Calculer la probabilité de gagner exactement deux fois en jouant cinq fois à ce jeu.

f) Calculer le nombre de fois qu'il faut jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit strictement supérieure à 99,99%.

Problème 4 (10 points)

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Le point P à coordonnées positives se déplace sur ce graphe et l'on s'intéresse à l'aire du rectangle grisé.



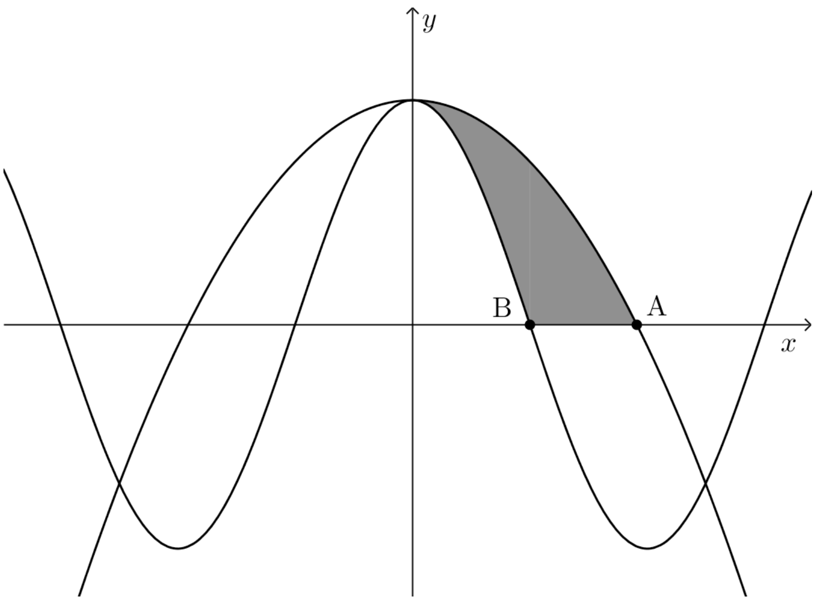
a) Montrer que la fonction f est paire.

b) Montrer que l'aire du rectangle est égale à $6e^{\frac{1}{9}}$ lorsque la première coordonnée de P vaut 3.

c) Déterminer les coordonnées de P pour que l'aire du rectangle soit minimale.

Problème 5 (10 points)

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et g données par $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ et $g(x) = 3\cos(x)$.



a) Calculer les coordonnées des points A et B.

b) Montrer que les graphes de f et g ont la même tangente au point de première coordonnée $x = 0$.

c) Calculer l'aire du domaine grisé.

Problème 6 (8 points)

Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on donne la sphère Σ d'équation

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y + 14z - 567 = 0 \ ,$$

ainsi que le plan π déterminé par les points $A(-2;3;12)$, $B(-5;-1;4)$ et $C(7;4;20)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan π.

b) Déterminer les coordonnées du centre de la sphère Σ ainsi que son rayon.

c) Montrer que le plan π coupe la sphère Σ.

d) L'intersection de la sphère Σ et du plan π est un cercle. Déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.