Mathématiques niveau II

Exercice 1 (poids 3)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln^2(x)$.

a) Trouver le domaine de définition de f, l'intersection du graphe avec l'axe Ox, l'asymptote, l'extremum et le point d'inflexion. Dessiner le graphe de f (unité : 4 carreaux).

b) Calculer, si elle existe, l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

c) On appelle I le plus grand intervalle réel pour lequel la fonction $f(x) = \ln^2(x)$ est une bijection de I dans $[0; \infty[$. Donner I, puis déterminer l'expression $f^{-1}(x)$ de la réciproque de f.

d) Résoudre l'équation différentielle $x\ln(x)\ y' - 2y = 0$, puis trouver la solution particulière dont le graphe passe par le point $A(e^2; 1)$.

Exercice 2 (poids 3)

Dans V_3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on considère les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'application linéaire f donnée par la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de la matrice F.

b) Déterminer les images par f des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

c) Donner les valeurs et les vecteurs propres de f.

d) Donner la matrice F' de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

e) Interpréter géométriquement l'application linéaire f.

f) Sans calculs, interpréter géométriquement l'application linéaire définie par la matrice F^5, puis donner la matrice F^5 dans la base $\mathcal{B}$.

g) On considère l'application linéaire g qui décrit la projection orthogonale sur la droite vectorielle parallèle à $\vec{a}$. Donner la matrice G' de g dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, puis décrire l'application linéaire $g \circ f$.

On considère l'affinité a donnée par la matrice F et qui laisse fixe l'origine.

h) Décrire l'image par a de l'axe Ox.

i) Décrire l'image par a du plan π: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 0 + \lambda - \mu. \\ z = 0 - \lambda \end{cases}$

j) Décrire avec précision l'image par a de la sphère unité s: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 3 (poids 2)

On considère les nombres complexes $z_A = 0$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$.

a) Montrer que $z_C = -1 + \sqrt{3}i$ forme avec z_A et z_B un triangle équilatéral dans le plan de Gauss. Déterminer un autre nombre complexe z qui a cette propriété.

b) Un polygone régulier à 12 côtés est centré en z_A et passe par z_B. Déterminer le sommet qui précède z_B lorsqu'on parcourt le polygone dans le sens positif.

c) Le polynôme $P(z) = z^3 - 14z^2 + 28z - 48$, dont tous les coefficients sont des nombres réels, s'annule lorsque $z = z_B$. Trouver ses autres zéros.

On considère la fonction f définie par $f(z) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\bar{z}$.

d) Déterminer les images par f de z_A, z_B et z_C, puis en déduire une interprétation géométrique simple de la transformation f.

e) Dans le plan de Gauss, les nombres $z = x + yi$ que f envoie sur l'axe réel forment une droite. Déterminer son équation.

Exercice 4 (poids 2)

Au début d'un examen oral de mathématiques, chaque candidat tire au sort un thème parmi « Analyse », « Probabilités », « Nombres complexes » et « Algèbre linéaire ». Chaque thème a une probabilité de $\frac{1}{4}$ d'être tiré au sort pour chaque élève.

a) Dans un groupe de 4 candidats, quelle est la probabilité qu'ils tirent tous le même thème ?

b) Dans un groupe de 4 candidats, quelle est la probabilité que chaque élève tire un thème différent ?

c) Dans un groupe de 5 candidats, quelle est la probabilité qu'au moins 3 élèves tirent le thème « Analyse » ?

Antoine a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de réussir son examen s'il tire le thème « Analyse » et une probabilité de $\frac{5}{6}$ de réussir son examen s'il tire un autre thème.

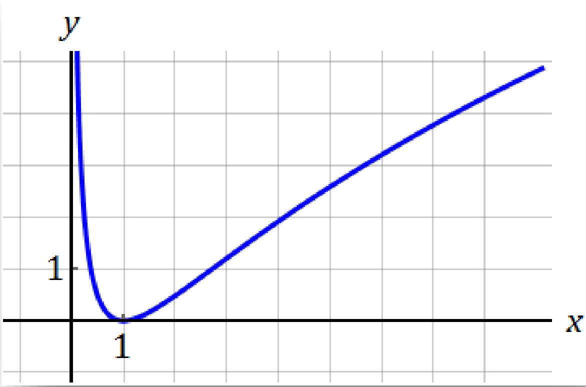
d) Quelle est la probabilité qu'Antoine réussisse son examen ?

e) Antoine a réussi son examen. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré le thème « Analyse » ?

Brigitte a une probabilité de m de réussir son examen si elle tire le thème « Analyse » et une probabilité de $1 - m^2$ de réussir son examen si elle tire un autre thème.

f) Quelle valeur faut-il donner à m pour que la probabilité que Brigitte réussisse son examen soit la plus grande possible ? Quelle est alors sa probabilité de réussite ?

Exercice 1



a) $D = \mathbb{R}_+^*$.

$I(1;0)$.

Asymptote verticale $x = 0$.

$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,$
$I(1;0)$ est un minimum.

$f''(x) = \frac{2\,(1-\ln(x))}{x^2}\,, f''(x) = 0 \Rightarrow x = e,$
$J(e;1)$ est un point d'inflexion.

Graphe ci-contre.

b) $\int \ln^2(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot\ln(x)\,dx = x(\ln(x)-1)\cdot\ln(x) - \int \left(x(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$= x(\ln(x)-1)\cdot\ln(x) - \int \ln(x)\,dx - \int dx$

$= x\left(\ln^2(x)-\ln(x)\right) - x(\ln(x)-1) + x + c$

$= x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + c.$

ou

$\int \ln^2(x)\,dx = \int u^2 e^u du = (u^2 - 2u + 2)e^u + c = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + c.$

ou encore

$\int \ln^2(x)\,dx = \int 1\cdot\ln^2(x)\,dx = x\cdot\ln^2(x) - \int 2x\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$= x\cdot\ln^2(x) - 2x(\ln(x)-1) + c = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + c$

$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 \ln^2(x)dx = \lim\limits_{t\to 0}[x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2)]_t^1$

$= 2 - \lim\limits_{t\to 0}\left(t(\ln^2(t) - 2\ln(t) + 2)\right) = 2.$

c) $I = [1;\infty[., y = \ln^2(x) \Rightarrow \sqrt{y} = \ln(x) \Rightarrow x = e^{\sqrt{y}} \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}.$

d) $x\ \ln(x)\ y' - 2y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{2}{x\ \ln(x)} \iff \frac{dy}{y} = \frac{2}{x\ \ln(x)}dx \iff \ln(y) = 2\int\frac{1}{x\ \ln(x)}dx$

$\iff \ln(y) \underbrace{=}_{\substack{u=\ln(x)\\ du=\frac{1}{x}dx}} 2\int\frac{1}{u}du \iff \ln(y) = 2\ln(u) + c$

$\iff \ln(y) = \ln(\ln^2(x)) + c \Rightarrow y = c\cdot\ln^2(x).$

Le graphe passe par le point $A(e^2;1) \Longrightarrow c\cdot\ln^2(e^2) = 1 \Longrightarrow 1 = 4\,c \Longrightarrow c = \frac{1}{4}$

$\Longrightarrow y = \frac{1}{4}\ln^2(x).$

Exercice 2

a) $|F| = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) = 0.$

b) $f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}\,,$

$f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{b}$

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$

$f(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3\vec{c}\,.$

c) 0 –propres : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 3 - propres : $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) Sans calculs : $F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$.

e) Projection orthogonale sur le plan formé de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ suivie par une homothétie de rapport 3.

f) Projection orthogonale sur le plan formé de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ suivie par une homothétie de rapport $3^5 = 243$.

$F = \begin{pmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 & -81 & 81 \\ -81 & 162 & 81 \\ 81 & 81 & 162 \end{pmatrix}.$

g) $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'application linéaire $g \circ f$ envoie tous les vecteurs sur $\vec{o}$.

h) L'image par a de l'axe Ox est la droite droite $O_x{}'$: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

i) L'image par a du plan π: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 0 + \lambda - \mu \\ z = 0 - \lambda \end{cases}$ est la droite p': $\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 1 \end{cases}$.

j) L'image par a de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est le disque de centre O, de rayon 3 et appartenant au plan $x + y - z = 0$.

Exercice 3

a) $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_B - z_C| = 2.$
$z_D = 2.$

b) Il faut faire subir à z_B une rotation de $-30°$ autour de 0.
$z_E = \text{cis}(30°) \cdot z_B = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) \cdot (1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i$.

c) P s'annule en z_B et $\overline{z_B}$,
il est ainsi divisible par $\left(z - \left(1 + \sqrt{3}i\right)\right)\left(z - \left(1 - \sqrt{3}i\right)\right) = z^2 - 2z + 4.$
$z^3 - 14z^2 + 28z - 48 : \; z^2 - 2z + 4 = z - 12$. Le 3ème zéro de P est $z = 12$.

d) $f(z_A) = f(0) = 0, f(z_B) = z_B, f(z_C) = z_D$.
f décrit une symétrie d'axe passant par z_A et z_B.

e) Géométriquement : droite passant par l'origine z_A et par z_C,
d'où l'équation $y = -\sqrt{3}x$.
ou
$f(x + yi) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(x - yi) = \frac{-x+\sqrt{3}y}{2} + \frac{y+\sqrt{3}x}{2}i$ réel si $\frac{y+\sqrt{3}x}{2} = 0 \Longrightarrow y = -\sqrt{3}x$.

Exercice 4

a) $P = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

b) $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.

c) $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
$= \frac{9}{1024} \cdot 10 + \frac{3}{1024} \cdot 5 + \frac{1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}$.

d) $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{19}{24}$.

e) $P = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{19}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{19}{24}} = \frac{4}{19}$.

f) $P = \frac{1}{4} \cdot m + \frac{3}{4} \cdot (1 - m^2) = \frac{1}{4}(-3m^2 + m + 3)$, max en $m = \frac{1}{6}, p = \frac{37}{48}$.

Problème 1 30 points

a) 10,5
b) 8
c) 5
d) 6,5

Problème 2 30 points

a) 2
b) 3
c) 3
d) 3
e) 3
f) 4
g) 3
h) 3
i) 3
j) 3

Problème 3 20 points

a) 4,5
b) 4
c) 4,5
d) 4
e) 3

Problème 4 20 points

a) 2,5
b) 2,5
c) 4,5
d) 2,5
e) 2,5
f) 5,5

Les notes de l'expert et du titulaire sont calculées au centième, la note finale au demi.

Sous enveloppe aux experts :

- le barème, la pondération des exercices et la répartition des points par question;
- une liste des élèves avec la note finale, au centième, de l'examen écrit.

Total 100 points

Note $n = 1 + \frac{\text{nb points}}{20}$ arrondie au centième.