ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité 2016

Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaires et tables
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Nom : Numéro : Classe :

Problème 1 (18 points)

On considère les deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x(x+1)e^{-x}$$

1.1 Pour la fonction f, déterminer son tableau de signe, les éventuelles asymptotes à son graphe et sa dérivée. Cette dérivée s'annule en trois valeurs de x qui sont environ égales à $-1,51$; $0,43$ et $3,09$. Pour chacune de ces 3 valeurs, déterminer s'il s'agit de l'abscisse d'un minimum ou d'un maximum.

1.2 Pour la fonction g, déterminer son tableau de signe, les éventuelles asymptotes à son graphe et son tableau de variation en indiquant les coordonnées des extremums.

1.3 Dans un repère d'unité 2 carrés, tracer les graphes de f et g et chercher les coordonnées des points d'intersection des 2 courbes.

1.4 Calculer l'angle aigu formé par les deux courbes à leur point d'intersection $(0; 0)$.

1.5 Pour quel $x \in [1 - \sqrt{6}; 0]$ la distance verticale entre les deux graphes est-elle maximale ?

1.6 Vérifier qu'une primitive de la fonction $f - g$ est donnée par

$$H(x) = (F - G)(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 3x + 3}{e^x}.$$

1.7 Calculer l'**intégrale**

$$\int_0^\infty (f(x) - g(x))\, dx.$$

Problème 2 (12 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les éléments géométriques suivants :

— le plan $\alpha : 3x + 2y = 18$,
— la droite d_1 d'intersection du plan α avec le plan (Oxy),
— le cercle Γ dans le plan α de centre $C(2; 6; 4)$ et de rayon 4.

2.1 Dessiner les traces du plan α et esquisser le cercle Γ dans un même repère orthonormé.

2.2 Déterminer l'équation de la droite d_1, puis montrer que d_1 est tangente au cercle Γ.

2.3 Calculer la distance entre d_1 et l'axe (Oz).

2.4 Calculer les coordonnées des deux points d'intersection du plan (Oyz) avec le cercle Γ.

2.5 Déterminer les coordonnées du centre de la sphère Σ tangente à l'axe (Oz) et dont l'intersection avec le plan α est le cercle Γ.

Problème 3 **(11 points)**

On donne la matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

Les deux parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

3.1 On considère l'endomorphisme f_k de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice M_k relativement à la base canonique.

(a) Pour quelles valeurs de k l'application f_k est-elle bijective ?

(b) Déterminer la valeur de k pour que f_k ait une valeur propre égale à 5.

(c) Posons $k = \frac{-1}{2}$. Déterminer l'image et le noyau de $f_{\frac{-1}{2}}$.

3.2 On considère cette fois-ci M_k comme étant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_k$.

(a) Pour quelle valeur de k le vecteur $(1; 0; 3)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il colinéaire à un des trois vecteurs de la base $\mathcal{B}_k$?

(b) On pose $k = 0$. Calculer la matrice inverse de M_0.

(c) On pose $k = 0$ et on considère le vecteur $v = (2; 3; 4)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les composantes de v dans la base $\mathcal{B}_0$.

Problème 4 **(12 points)**

Une fabrique de lave-linges a établi que la variable aléatoire indiquant la durée de bon fonctionnement d'un appareil a pour densité la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{20\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 20, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } x \text{ en années.}$$

4.1 Vérifier que f est une densité de probabilité.

4.2 Calculer la durée moyenne de bon fonctionnement de ces appareils et l'écart-type.

4.3 Calculer la probabilité qu'un tel appareil fonctionne sans problème plus de 10 ans.

À propos de linge à laver, la famille Tache achète toujours de la lessive A ou B. En moyenne, M. Tache qui fait les commissions pour la famille, prend 3 fois sur 7 de la lessive A et 4 fois sur 7 de la lessive B.

4.4 Calculer la probabilité qu'il achète exactement 3 fois de la lessive A lors de ses 7 prochains achats de lessive.

4.5 En utilisant l'approximation de la loi binomiale par la loi normale, calculer la probabilité qu'en 25 achats de lessive, il achète plus de lessive A que de lessive B.