

EXAMEN DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ  
MATHÉMATIQUES – NIVEAU STANDARD

---

Classes concernées :	3M2, 3M3, 3M4, 3M5, 3M6, 3M7, 3M8, 3M03, 3M04, 3M05, 3M06, 3M07
Date :	Jeudi 9 juin 2016
Durée :	4h
Matériel autorisé apporté par les élèves :	Formulaire agréé, non annoté Calculatrice de type reconnu

---

**Problème 1** (19 points)

On considère la fonction  $f$ , donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

où  $x$  est exprimé en radians.

- 1.1 Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 1.2 Calculer  $f(0)$  et  $f(2\pi)$ .

Dans tout ce qui suit, nous allons étudier la fonction sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

- 1.3 Déterminer le(s) zéro(s) et étudier le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
- 1.4 Calculer  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x)$  et interpréter le résultat.

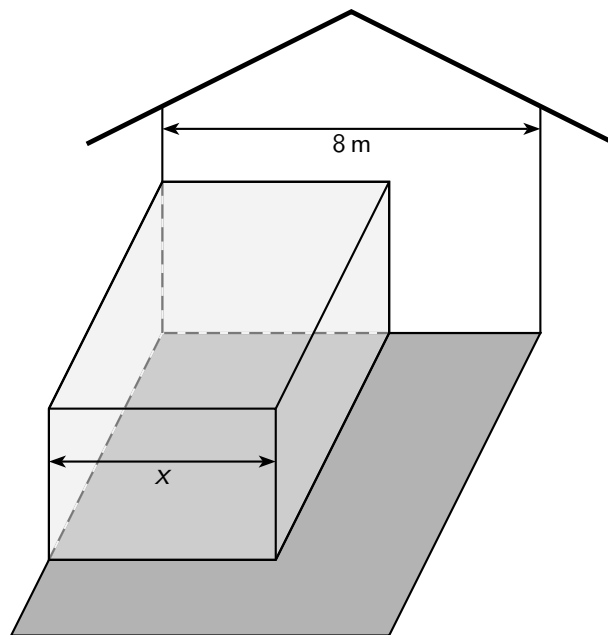
On donne la dérivée de cette fonction :

$$f'(x) = \frac{\sin(x) - 2}{(1 + \sin(x))^2}$$

- 1.5 Étudier la croissance de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
- 1.6 Déterminer l'équation de la tangente  $t$  au graphe de  $f$  au point d'abscisse  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- 1.7 Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

**Problème 2** (14 points)

Monsieur Bellivert souhaite construire une véranda. Celle-ci aura la forme d'un parallélépipède rectangle. Elle sera directement posée sur le sol de sa terrasse et appuyée contre la façade de sa maison.



La longueur de la véranda devra être le double de sa largeur. Cette largeur  $x$  ne devra pas dépasser celle de la maison, à savoir 8 mètres. Enfin, le volume de la véranda vaudra  $96 \text{ m}^3$ .

Les matériaux utilisés sur les trois côtés coûtent  $240 \text{ CHF/m}^2$ . Ceux du toit plat, plus légers, coûtent quant à eux  $225 \text{ CHF/m}^2$ .

- 2.1** Montrer que le prix de construction de la véranda peut s'exprimer, par rapport à sa largeur  $x$ , au moyen de la fonction :

$$P(x) = \frac{450x^3 + 57'600}{x}$$

- 2.2** Déterminer les dimensions de la véranda de prix minimal.

- 2.3** Quel est le coût de cette véranda de prix minimal ?

**Problème 3** (12 points)

En décembre 2013, une épidémie virale a débuté au niveau mondial. Plusieurs chercheurs se sont efforcés de mettre au point un vaccin contre le virus. Une fois créé, le vaccin a été testé dans plusieurs pays afin d'être validé. Des tests ont été effectués sur 160 volontaires pour évaluer les effets secondaires.

Parmi ces volontaires, 80 ont reçu une version du vaccin à faible dosage, 40 ont reçu une version du vaccin à haut dosage et 40 ont reçu un placebo (ils croyaient recevoir le vaccin alors qu'ils recevaient une injection sans vaccin). Les volontaires n'étaient pas informés de ce qui leur était injecté.

Au terme du test, il est apparu que 90% de ceux qui ont reçu le vaccin à faible dosage ont ressenti des effets secondaires classiques, tels que fièvre et refroidissement, les 10% restants n'ayant pas ressenti d'effet secondaire particulier. Parmi les personnes ayant reçu le vaccin à haut dosage, 60% ont ressenti des effets secondaires classiques, alors que les 40% restants ont ressenti des effets secondaires inattendus : des douleurs articulaires. Enfin, dans le groupe qui a reçu le placebo, 30% des individus ont ressenti des effets secondaires classiques, les autres n'ayant, quant à eux, rien ressenti du tout.

- 3.1 Établir l'arbre correspondant à la situation décrite.
- 3.2 Montrer que la probabilité pour un volontaire d'avoir eu la malchance de ressentir des douleurs articulaires est de 10%.
- 3.3 Quelle est la probabilité pour un individu ayant participé au test de n'avoir ressenti aucun effet secondaire ?
- 3.4 Déterminer la probabilité d'avoir fait partie du groupe placebo, si des effets secondaires classiques ont été ressentis.

On recommence l'expérience avec de nouveaux volontaires.

- 3.5 Marie est une spécialiste qui suit 25 nouveaux volontaires. On suppose que la probabilité de ressentir des douleurs articulaires vaut également 10%. Afin de garantir une étude sans influence, Marie n'est pas non plus informée de ce qu'elle injecte à ses patients. Quelle est la probabilité qu'exactement cinq patients dont elle a la charge ressentent des douleurs articulaires ?

**Problème 4** (13 points)

Les parties A (5 points), B (3 points) et C (5 points) sont indépendantes.

**Partie A**

Alice ouvre un compte dans une banque et y verse 1'000 francs, soumis à intérêts composés.

- 4.A.1** Si le taux d'intérêt annuel que pratique cette banque est de 3%, quel sera le montant sur le compte au bout de 31 ans ?
- 4.A.2** À quel taux doit-elle placer le capital pour que celui-ci double après 10 années ?

**Partie B**

12 candidats, à savoir 6 hommes et 6 femmes, participent à un concours de talents diffusé à la télévision. L'un après l'autre, chacun des candidats présente une prestation de deux minutes.

- 4.B.1** Combien de possibilités d'ordre de passage des candidats s'offrent à l'organisateur du concours ?
- 4.B.2** Parmi les 12 candidats, seuls 5 sont sélectionnés pour la finale. En tenant compte de l'ordre de passage, combien de finales différentes avec 3 hommes et 2 femmes sont-elles possibles ?

**Partie C**

Soit la fonction  $f(x) = e^x$  et soit le nombre réel  $a > 0$ .

On considère le domaine borné  $D$  limité par le graphe de  $f$ , les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et la droite  $x = a$ .

- 4.C** Déterminer la valeur exacte de  $a$  pour que le volume engendré par la rotation de  $D$  autour de l'axe  $Ox$  soit égal à  $2\pi$ .

**Problème 5** (16 points)

On considère le cercle  $\gamma : x^2 + y^2 - 4x = 2y + 20$  et le point  $A(4; -10)$ .

- 5.1** Montrer que le centre de  $\gamma$  est  $C(2; 1)$  et que son rayon vaut  $r = 5$ .
- 5.2** Vérifier par un calcul que le point  $A$  est extérieur au cercle.
- 5.3** Montrer que la droite  $t_1 : 24x - 7y - 166 = 0$  est une tangente au cercle  $\gamma$  passant par le point  $A$ .
- 5.4** On donne  $t_2$ , l'autre tangente à  $\gamma$  passant par le point  $A$ . Son équation est  $t_2 : 4x + 3y + 14 = 0$ . Calculer les coordonnées de son point de contact avec le cercle  $\gamma$ .
- 5.5** Donner l'équation de la droite  $d$  de pente  $\frac{4}{3}$  telle que  $\gamma$  soit le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites  $t_1$ ,  $t_2$  et  $d$ .