Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 2)

Pour les graphes de ce problème, utiliser la feuille annexée.

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.

a) Etudier la fonction f : domaine de définition, intersections du graphe avec les axes, limites de $f(x)$ lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to \infty$, coordonnées des points à tangente horizontale et graphe dans le repère donné en annexe.

On considère encore la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

b) Trouver les points d'intersection entre les graphes de f et g puis dessiner le graphe de g dans le repère donné en annexe.

c) Trouver une primitive des fonctions f et g.

d) Hachurer sur le dessin la surface fermée comprise entre les deux graphes puis calculer l'aire de cette surface.

On considère finalement la fonction h définie par $h(x) = \ln(g(x)) = \ln(x^2 - 2x + 1)$.

e) Trouver le domaine de définition de h et les intersections du graphe de h avec les axes.

f) Sans faire une étude supplémentaire, esquisser le graphe de h dans le repère donné en annexe.

g) Déterminer le point du graphe de h en lequel la tangente est parallèle à la droite $d : y = -x + 3$.

Problème 2 (poids 2)

Pour les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée.
Dessiner les parties invisibles en traitillé, utiliser plusieurs couleurs.

On considère les points $A(8;0;0)$, $B(2;6;3)$, $C(2;12;0)$ et $P(4;8;0)$, tous contenus dans le plan $\pi : 2x + y + 2z - 16 = 0$.

a) Dessiner le triangle ABC et les traces de π.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Vérifier par calcul que le point P est sur la droite AC et dessiner le point P.

d) Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$.

e) Appelons H le point de la droite AC tel que BH soit une hauteur du triangle ABC. Le point H est-il situé entre A et P ou entre C et P ? Justifier la réponse.

On considère encore le plan $\sigma : x + z - 5 = 0$.

f) Dessiner les traces de σ et la droite d'intersection des plans π et σ.

g) Hachurer la partie du triangle ABC située au-dessus du plan σ.

Soit γ le cercle contenu dans le plan π, centré en C et tangent à la droite AB.

h) Montrer que le rayon du cercle γ vaut 6.

i) Le cercle γ est l'intersection du plan π avec une sphère de rayon 10 et de centre D. Déterminer la distance de D au plan π puis calculer les coordonnées de D. Donner une seule des deux possibilités

Problème 3 (poids 1)

Au début d'un examen oral de mathématiques, chaque candidat tire au sort un thème parmi "Analyse", "Probabilités" et "Géométrie". Chaque thème a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être tiré au sort pour chaque candidat.

a) Trois candidats se présentent à l'examen. Quelle est la probabilité qu'ils tirent tous le même thème ?

b) Trois candidats se présentent à l'examen. Quelle est la probabilité que chacun d'eux tire un thème différent ?

c) Cinq candidats se présentent à l'examen. Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre eux tirent le thème "Analyse" ?

d) Déterminer le nombre minimal de candidats qui doivent se présenter à l'examen pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux tire le thème "Analyse" soit supérieure à 99%.

La probabilité qu'Antoine réussisse son examen vaut $\frac{3}{4}$ s'il tire le thème "Analyse" et vaut $\frac{7}{8}$ s'il tire un autre thème.

e) Quelle est la probabilité qu'Antoine réussisse son examen ?

f) Sachant qu'Antoine a réussi son examen, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le thème "Analyse" ?

La probabilité que Brigitte réussisse son examen vaut x si elle tire le thème "Analyse" et vaut $1 - x^2$ si elle tire un autre thème.

g) Calculer, en fonction de x, la probabilité que Brigitte réussisse son examen.

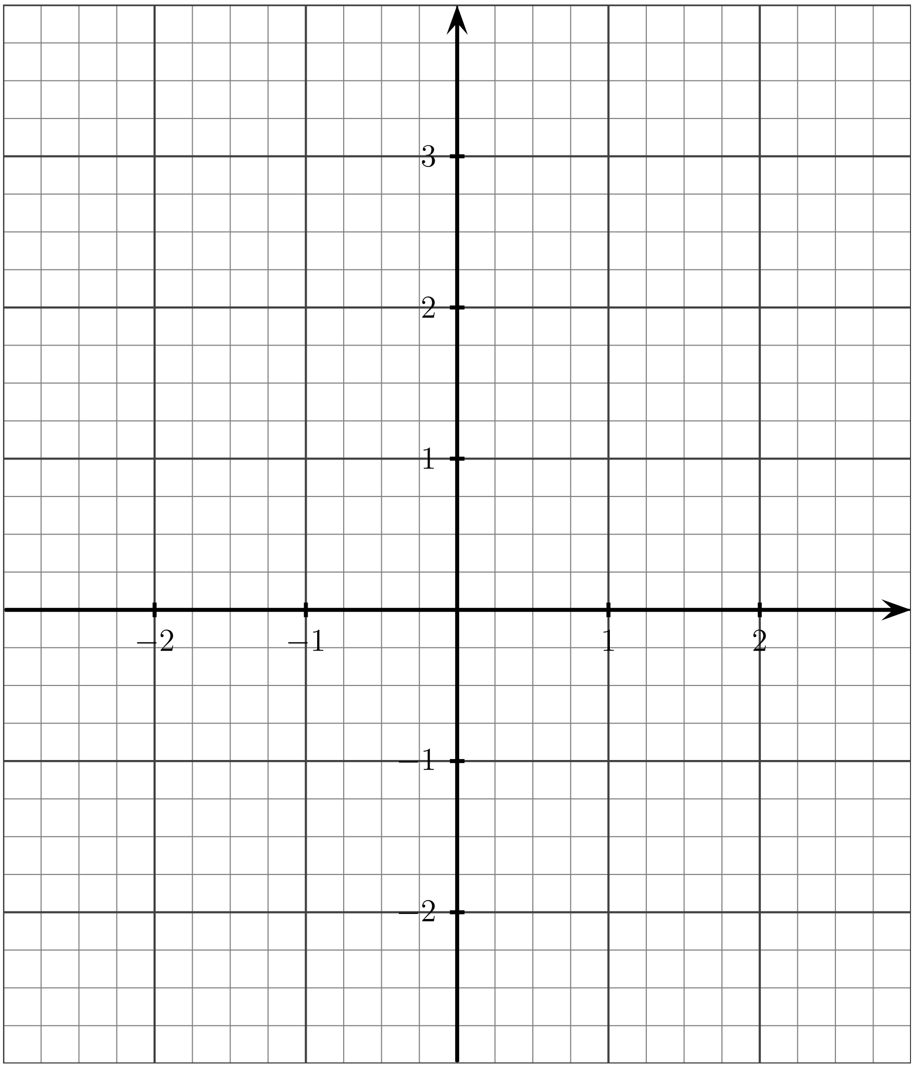
h) Quelle valeur faut-il donner à x pour que la probabilité que Brigitte réussisse son examen soit la plus grande possible ? Quelle est alors sa probabilité de réussite ?

Annexe pour le problème 1

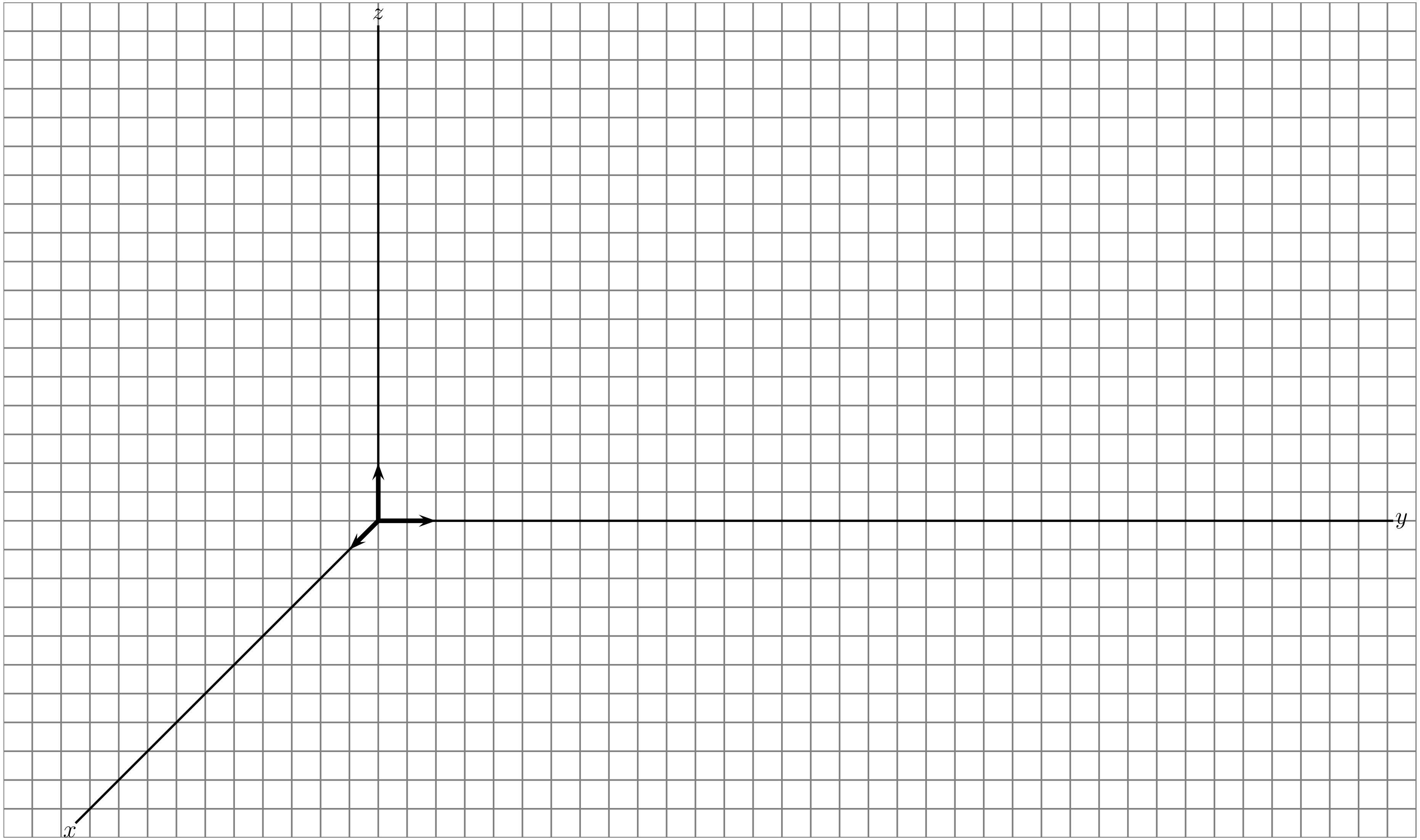
Nom et prénom : ....   Classe : ....

Dessiner les graphes de f, g et h avec trois couleurs différentes

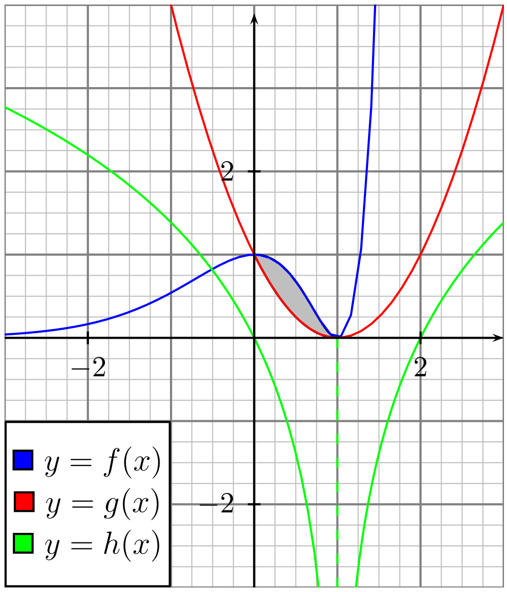
☐ $y = f(x)$ ☐ $y = g(x)$ ☐ $y = h(x)$



Annexe pour le problème 2



Problème 1



a) $f(x) = (x-1)^2 e^{2x}$

$D = \mathbb{R}$, $I_x(1;0)$, $I_y(0;1)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \text{"}\infty \cdot \infty\text{"} = \infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}\infty \cdot 0\text{"} = 0$ car exp gagne

donc A.H. $y = 0$ lorsque $x \to -\infty$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^{2x} + (x^2-2x+1)2e^{2x} \\ &= e^{2x}(2x-2+2x^2-4x+2) \\ &= (2x^2-2x)e^{2x} \\ &= 2x(x-1)e^{2x} \end{aligned}$$

nul pour $x \in \{0, 1\}$, donc p.t.h. en I_x et I_y.

b) $f(x) = g(x)$, $(x^2-2x+1)(e^{2x}-1) = 0$, $x^2-2x+1 = 0$ ou $e^{2x} = 1$, $(x-1)^2 = 0$ ou $2x = 0$, $x = 1$ ou $x = 0$. Les graphes se coupent en $I_x(1;0)$ et $I_y(0;1)$.

c) On a $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ et on peut poser $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$F'(x) = (2ax+b)e^{2x} + (ax^2+bx+c)2e^{2x} = \big(2ax^2 + (2a+2b)x + (b+2c)\big)e^{2x}$$

En comparant avec $f(x)$, on a $2a = 1$ donc $a = \frac{1}{2}$, $2a+2b = -2$ donc $b = -\frac{3}{2}$, et $b+2c = 1$, donc $c = \frac{5}{4}$. Au total, on a $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{2x} = \frac{1}{4}(2x^2-6x+5)e^{2x}$.

d) $\Big[F(x) - G(x)\Big]_0^1 = \Big[F(x)\Big]_0^1 - \Big[G(x)\Big]_0^1 = \dfrac{e^2-5}{4} - \dfrac{1}{3} \cong 0.2639$

e) La fonction h est définie lorsque $g(x) > 0$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a $h(0) = \ln(1) = 0$ donc $I_y(0;0)$. De plus, $h(x) = 0$ lorsque $g(x) = 1$, $x \in \{0, 2\}$, donc $I_{x1}(0;0)$ et $I_{x2}(2,0)$.

f) Le graphe de h est dessiné en vert au point a).

g) La dérivée de $h(x)$ est $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+1} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{x-1}$. Elle vaut -1 lorsque $x-1 = -2$, donc $x = -1$. Le point cherché est $P(-1;\ln(4))$.

Problème 2

a) voir dessin

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} = -18\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, Aire $= \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{18 \cdot 3}{2} = 27$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

d) $\varphi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right) = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{17}\sqrt{20}}\right) \cong 102.53°$

e) H est situé entre A et P car l'angle φ est obtus

f) g) voir dessin

h) $r = \text{dist}(D, \text{droite } AB) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{18 \cdot 3}{9} = 6$ (vecteurs calculés en a)...)

i) Par le théorème de Pythagore, on a $\text{dist}(D, \pi) = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. La relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} \pm \dfrac{8}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ permet de trouver $D\left(\dfrac{22}{3}; \dfrac{44}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$ ou $D\left(\dfrac{-10}{3}; \dfrac{28}{3}; \dfrac{-16}{3}\right)$.

Problème 3

a) $P(AAA, TTT, GGG) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{9}$

b) $\dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

c) $P(3A + 2\overline{A}, 4A + 1\overline{A}, 5A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 (10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1) = \dfrac{51}{243}$

d) On cherche l'entier n minimal de sorte que $1 - (2/3)^n > 0.99$, $(2/3)^n < 0.01$, $n \ln(2/3) < \ln(0.01)$, $n > \dfrac{\ln(0.01)}{\ln(2/3)} \cong 11.36$, donc $n = 12$

e) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

f) selon e) : $\dfrac{1/4}{5/6} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{3}{10}$

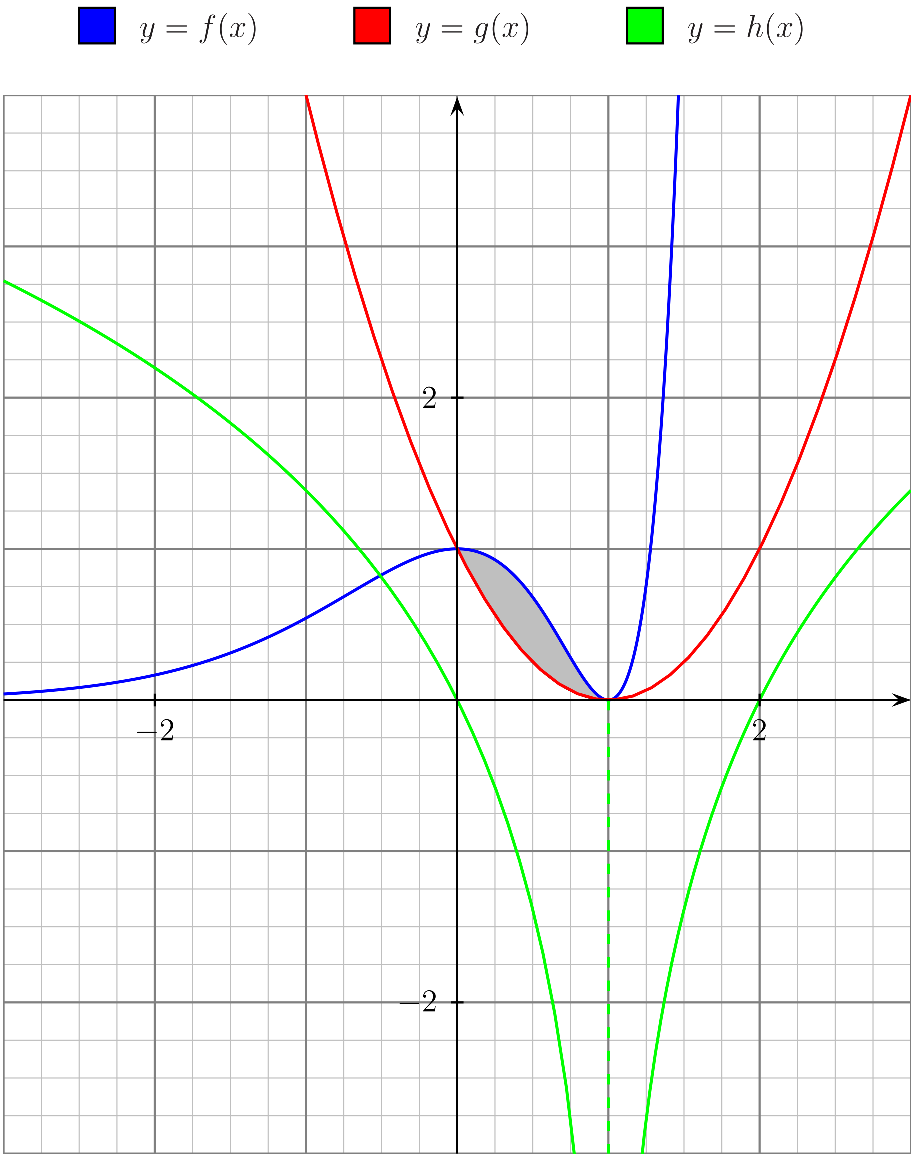
g) $\dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{2}{3} \cdot (1 - x^2) = \dfrac{x + 2 - 2x^2}{3} = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{3}$

h) La courbe $y = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{3}$ est une parabole dont le maximum est donné par $x = \dfrac{-1/3}{-4/3} = \dfrac{1}{4}$. La valeur maximale est $y = \dfrac{-2(1/4)^2 + 1/4 + 2}{3} = \dfrac{-2 + 4 + 32}{3 \cdot 16} = \dfrac{34}{3 \cdot 16} = \dfrac{17}{3 \cdot 8} = \dfrac{17}{24}$, ce qui correspond à la probabilité cherchée.

Annexe pour le problème 1

Nom et prénom : .... Classe : ....

Dessiner les graphes de f, g et h avec trois couleurs différentes



Annexe pour le problème 2