ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

**Kollegium St. Michael** KSMI
**Collège St-Michel** CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

**Maturité 2015**



# Application des mathématiques

| | |
|---|---|
| Durée de l'épreuve : | 180 minutes |
| Ouvrage et matériel autorisés : | • ordinateur • documents du cours |
| Barème : | 50 points correspondent à la note 6 |

Nom : Numéro : Classe :

## Problème 1 ( 8 points )

Le nombre retourné d'un nombre naturel est le nombre obtenu en le lisant de droite à gauche. Par exemple, le nombre retourné de 1356 est 6531. Un palindrome est un nombre qui est égal à son nombre retourné, comme 12421 par exemple. Certains nombres sont tels que lorsqu'on les additionne avec leur nombre retourné, on obtient un palindrome. Par exemple, $134 + 431 = 565$. D'autres nombres sont tels qu'on finit par obtenir un palindrome après un certain nombre d'itérations. Par exemple, 68 donne un palindrome après trois itérations comme le montrent les calculs suivants :

$$68 + 86 = 154 \qquad 154 + 451 = 605 \qquad 605 + 506 = 1111.$$

Il existe enfin des nombres pour lesquels on ne sait pas si on finira par obtenir un palindrome après un certain nombre d'itérations. Le plus petit d'entre eux est 196, pour lequel il n'y a toujours pas de palindrome en vue après des centaines de millions d'itérations.

1.1 Créer un module Mathematica `palindromeq` qui prend un nombre naturel comme argument et qui renvoie `True` si c'est un palindrome et `False` sinon. Par exemple,

$$\texttt{palindromeq}[12421] = \texttt{True} \quad \text{et} \quad \texttt{palindromeq}[10] = \texttt{False}.$$

1.2 Créer un module Mathematica `retourneetadditionne` qui prend un nombre naturel comme argument et qui renvoie le résultat obtenu en additionnant ce nombre avec son nombre retourné. Par exemple,

$$\texttt{retourneetadditionne}[134] = 565 \quad \text{et} \quad \texttt{retourneetadditionne}[20] = 22.$$

1.3 Créer un module Mathematica `algorithme196`, qui prend un nombre naturel inférieur ou égal à 195 comme argument et qui renvoie le palindrome obtenu après un certain nombre d'itérations ainsi que ce nombre d'itérations. Par exemple,

$$\texttt{algorithme196}[68] = \{1111, 3\} \quad \text{et} \quad \texttt{algorithme196}[131] = \{131, 0\}.$$

**Problème 2** **( 10 points )**

On considère la fonction réelle $f$ définie par

$$f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}$$

et son unique zéro, noté $z$ dans la suite de ce problème. Lorsqu'on utilise la méthode de Newton pour déterminer $z$ à partir d'une estimation initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on construit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 & & \text{estimation initiale} \\ x_{n+1} & = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pour autant qu'elle existe, c'est-à-dire pour autant que chacun de ses termes soit un nombre réel.

2.1 Représenter le graphe de $f$ et calculer la valeur exacte de $z$.

2.2 Calculer les 7 premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de l'estimation initiale $x_0 = \dfrac{3}{10}$.

2.3 Déterminer la valeur exacte de l'estimation initiale pour laquelle $x_1$ n'existe pas.

2.4 Donner une valeur initiale pour laquelle $x_1$ existe mais $x_2$ n'existe pas.

2.5 Donner l'ensemble des estimations initiales pour lesquelles la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe mais diverge.

2.6 A l'aide d'un calcul approprié, déterminer l'ensemble des estimations initiales pour lequelles la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $z$.

**Problème 3** **( 8 points )**

Lorsqu'on introduit des écureuils sur un territoire donné, l'évolution de la population $P(t)$ d'écureuils, où $t$ est exprimé en années, dépend du nombre $P_0 = P(0)$ d'individus initialement introduits et de la taille et des ressources du territoire. Dans ce problème, on suppose que $P(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{P}{40}\right)\left(\frac{P}{10} - 1\right).$$

3.1 Représenter un champ de directions de cette équation différentielle pour une durée de 10 ans et un maximum de 50 écureuils.

3.2 Donner les solutions d'équilibre de cette équation différentielle.

3.3 Numériquement, déterminer les solutions de cette équation différentielle qui correspondent aux populations initiales de huit et de quinze écureuils. Représenter ces solutions et un champ de directions de l'équation différentielle sur un même graphique.

3.4 Si on se fie à ce modèle, combien d'écureuils est-il raisonnable d'introduire initialement sur le territoire si on souhaite que des écureuils le peuplent durablement ?

**Problème 4** **( 11 points )**

On considère l'aire $A$ située entre le graphe de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x - \frac{99}{100}} + 2$$

et l'axe $O_x$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

Pour chaque $n$ pair dans $\mathbb{N}^*$, la méthode d'intégration numérique de Simpson donnée dans le formulaires et tables permet de calculer $S_n$ et $B_n$, où :

- $S_n$ est une approximation de $A$ ;
- $B_n$ est une borne supérieure de l'erreur absolue $E_n$ commise en approximant $A$ par $S_n$.

En utilisant ces notations, on a donc $E_n = |A - S_n| \leq B_n$ pour chaque $n$ pair dans $\mathbb{N}^*$.

4.1 Montrer que $A = 2 + \ln(101)$.

4.2 Montrer que $B_{100} = \dfrac{40}{3}$.

4.3 Calculer $S_{100}$ et $E_{100}$. Donner un argument qui justifie la grande différence entre $B_{100}$ et $E_{100}$.

4.4 Montrer qu'il faut que $n$ soit supérieur ou égal à 3400 pour que $B_n$ soit inférieure ou égale à $10^{-5}$.

4.5 Calculer la valeur de $n$ à partir de laquelle $E_n$ est inférieure ou égale à $10^{-5}$.

**Problème 5** **( 13 points )**

Dans ce problème, on admet que la fonction $\arctan(x)$ est égale à sa série de Mac Laurin sur son intervalle de convergence.

5.1 Calculer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série de Mac Laurin de $\arctan(x)$.

5.2 Déduire la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

de ce qui précède.

5.3 Montrer qu'il faut calculer au moins 119 termes dans la formule de Leibniz pour obtenir une approximation de $\pi$ dont 2 décimales sont correctes (en admettant que dans les résultats intermédiaires, on conserve systématiquement 10 décimales).

5.4 La formule de Leibniz converge donc très lentement. Expliquer pourquoi l'égalité $\dfrac{\pi}{6} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ permet d'obtenir une série qui converge nettement plus rapidement vers $\pi$.

5.5 En 1706, John Machin a trouvé la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

En combinaison avec la série de Mac Laurin de $\arctan(x)$, elle lui a permis d'être le premier à calculer les 100 premières décimales de $\pi$. Calculer ces 100 décimales.