ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité 2015

Mathématiques standard

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (13 points)

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{4x^3 - 8x^2}{e^x}$$

1.1 Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4x(x^2 - 5x + 4)}{e^x}$

1.2 Étudier, sans calculer la dérivée seconde, la fonction f et représenter son graphe dans un repère othonormé (unité : 4 carrés).

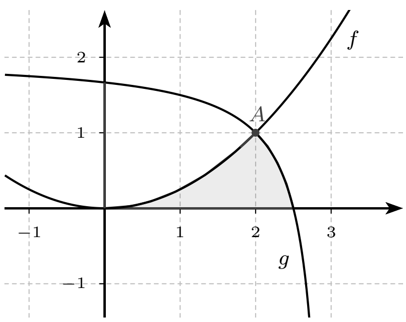
Problème 2 (4 points)

Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x^2}{4}$$

et

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$$



Sachant que, dans la figure ci-contre, les graphes ne se coupent qu'au point $A(2; 1)$, calculer l'aire du domaine grisé.

Problème 3 (8 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soit t la tangente au graphe de f au point P d'abscisse a, $a > 0$. Cette tangente coupe l'axe des x au point A et l'axe des y au point B.

3.1 Montrer que la longueur du segment $[AB]$ est égale à

$$L(a) = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}, \qquad a > 0$$

3.2 Dresser le tableau de signe de $L'(a)$.

3.3 Calculer la valeur minimale de la longueur $L(a)$.

Problème 4 **(14 points)**

4.1 Soit le plan p d'équation $2x + 2y + z = 22$.
Dans un système d'axes, dessiner ce plan avec ses traces en faisant un choix judicieux des unités.

4.2 Vérifier que la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -4 - k \\ y = 0 \\ z = 30 + 2k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$
est l'une de ces traces.

4.3 Soit la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 31 = 0$.
Cette sphère coupe le plan de base d'équation $z = 0$ selon un cercle. Déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

4.4 Vérifier que le plan p est tangent à la sphère Σ , puis déterminer les coordonnées du point de tangence.

4.5 Il existe un second plan tangent à la sphère Σ et strictement parallèle au plan p. Déterminer son équation.

Problème 5 **(13 points)**

Un domaine skiable comptabilise 14 pistes distinctes regroupées dans 3 catégories suivant le niveau de difficulté : **6 pistes bleues, 6 rouges et 2 noires**. Toutes les pistes aboutissent à la même station de départ.

Les parties A et B peuvent être résolues indépendamment.

Partie A
Carlo passe ses vacances dans cette station de ski.

5.1 Carlo a descendu au hasard 2 pistes différentes. Quelle est la probabilité qu'il n'ait descendu que des pistes rouges ?

5.2 Carlo a descendu au hasard 10 pistes différentes. Quelle est la probabilité qu'il ait descendu 5 pistes bleues, 3 rouges et 2 noires, peu importe dans quel ordre ?

5.3 Carlo a descendu exactement une fois chacune des pistes du domaine skiable. Quelle est la probabilité qu'il ait descendu à la suite toutes les pistes rouges ?

Partie B
Deux remontées mécaniques partant de la station de départ desservent ces 14 pistes :

la **télécabine** rend accessible **1 piste noire, 4 rouges et 3 bleues**, alors que
le **télésiège** mène aux autres pistes, donc à **1 noire, 2 rouges et 3 bleues**.

Quand Lara skie dans cette station, la probabilité qu'elle utilise la télécabine avant de descendre est de $\frac{2}{3}$. Elle prend toujours une des deux remontées mécaniques pour atteindre le haut des pistes, puis descend au hasard une des pistes accessibles.

5.4 Sachant que Lara descend une seule piste rouge, calculer la probabilité qu'elle ait utilisé le télésiège avant de la descendre.

5.5 Lara a descendu 2 pistes en ayant utilisé à chaque fois une remontée mécanique différente. Quelle est la probabilité que les deux pistes soient rouges ?

5.6 Lara a descendu 10 pistes. Calculer la probabilité qu'elle soit montée au moins une fois avec le télésiège.