Nom : .... Prénom : ....

gymnase
Yverdon

Examens de maturité gymnasiale à l'Ecole de Maturité — Juin 2014

MATHEMATIQUES NIVEAU RENFORCÉ — 3M

Durée :	240 minutes
Matériel autorisé :	formulaire Polymaths annoté, sans ajout de pages, sans collage d'éléments supplémentaires ni de «Tipp-Ex», tables et formulaires CRM sans annotations, calculatrice sans écran graphique, ne permettant pas le calcul formel, la résolution automatique d'équations, le calcul intégral ou le calcul matriciel, règle, équerre, rapporteur, compas

Consignes :

1. Le candidat met son nom sur toutes les feuilles, y compris celles de brouillon.
2. Les points attribués à chaque problème sont indiqués entre parenthèses à droite du n° du problème.
3. Après avoir si nécessaire travaillé sur un brouillon, le candidat rédige à l'encre les solutions sur les feuilles officielles.
   La rédaction doit être soignée.
   Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés.
   Les feuilles de brouillon sont jointes aux feuilles officielles mais ne seront pas corrigées.

Problème 1 [33 pts]

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A (12 pts)

Soient, relativement à un repère orthonormé du plan, les cercles Γ_1 et Γ_2 donnés par

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 4x - 10y - 231 = 0 \quad \text{et} \quad (\Gamma_2) : x^2 + y^2 - 30x - 62y + 601 = 0$$

1. Trouver les coordonnées des deux points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2. On appellera A le point d'abscisse positive.
2. On appelle t_1 et t_2 les tangentes respectives à Γ_1 et Γ_2 en A. Montrer que t_1 et t_2 sont perpendiculaires.

Partie B (21 pts)

Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on donne :
- deux points $P(6; 3; 1)$ et $Q(4; 1; -3)$
- deux plans $(\alpha) : 3x + 2y + 5z - 2 = 0$ et $(\beta) : 2x + y - z - 5 = 0$.

1. Déterminer l'équation du plan médiateur μ du segment PQ.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection i des plans α et β .
3. En déduire l'équation de la sphère Σ passant par les points P et Q, dont le centre C se situe sur i.

Problème 2 [33 pts]

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A (25 pts)

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

1. Etudier le signe de f.
2. Etudier la croissance de f et donner les coordonnées de ses éventuels extrema.
3. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes verticales ou horizontales de $y = f(x)$.
4. Esquisser le graphe de f.

Partie B (8 pts)

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ et $D(1;2)$. Le rectangle $ABCD$ est partagé en deux domaines par la courbe $y = \sqrt{x}$. Calculer le rapport des aires des domaines ainsi déterminés.

Problème 3 [10 pts]

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A (4 pts)

Après une nouvelle marée noire, l'organisme de protection des oiseaux de mer a évalué à 2000 la population de mouettes dans la zone sinistrée. On a bagué 100 d'entre elles. Peu après, on capture 20 mouettes dans cette zone. Calculer la probabilité de n'avoir aucune mouette baguée.

Partie B (6 pts)

Une urne A contient 8 boules numérotées de 1 à 8 et une urne B contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Si le nombre indiqué sur la boule est un multiple de 3, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

Problème 4 [28 pts]

Soit $B_1 = (e_1; e_2; e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ avec $g(e_1) = e_3, g(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $g(e_3) = e_3$.

1. Donner la matrice G_1 de g dans B_1 et donner $\mathrm{Ker}(g)$.
2. Posons $f_1 = e_1 - e_3, f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   Montrer que $B_2 = (f_1; f_2; f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
3. Ecrire les matrices de changement de base.
4. Ecrire la matrice G_2 de g dans la base B_2 ; en déduire la nature de l'application g.
   (Les équations des plans et des droites concernés ne sont pas demandées dans la base B_1).