Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve:	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés:	Calculatrice non programmable, formulaire et tables
Barème:	50 points correspondent à la note 6

Analyse 1 (13 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{3+x}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3) Démontrer que f n'admet pas d'extrémum.
4) Démontrer que f admet un point d'inflexion.
5) Utiliser une propriété des logarithmes pour réécrire la fonction f,
   puis déterminer une primitive de f.
6) Démontrer que le point $S(-1;0)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.
7) Calculer l'aire exacte du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des x et les verticales d'équation $x=-2$ et $x=0$.

Analyse 2 (8 points)

On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = x\sqrt{4-mx}$ avec $m>0$.

On trace la courbe de f seulement pour $x \geq 0$.

En faisant tourner cette courbe autour de l'axe des x, on obtient une sorte de figue.

1) Pour $m=1$, esquisser cette « figue ».
2) Pour quelle valeur de m la figue a-t-elle une largeur totale de $\dfrac{32}{9}$ (parallèlement à l'axe des y) ?
3) Pour quelle valeur de m la figue a-t-elle un volume de 9π ?

Géométrie (12 points)

Dessinez le plan (α) d'équation $2x+3y+6z=12$ (avec ses traces).

Les quatre questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1) Ce plan et les 3 plans de base délimitent le tétraèdre OABC : calculez son volume.
2) Calculez l'aire de la face ABC.
3) Déterminez les coordonnées exactes du centre du cercle passant par les points A, B et C.
4) Déterminez l'équation de la sphère inscrite dans ce tétraèdre.

Algèbre linéaire (8 points)

L'application linéaire $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+6z \\ 9x+9y-9z \\ 3x+y+3z \end{pmatrix}$

Déterminez les valeurs propres de f ainsi que les espaces propres associés à ces valeurs propres.

Déduisez-en la nature de f.

Probabilités (12 points)

On considère le jeu suivant :

Le joueur A lance quatre fois une pièce de monnaie puis il note le nombre de "pile" obtenu au cours de ces quatre lancers. Il passe alors la pièce au joueur B qui fait la même chose.
Le vainqueur est celui qui a obtenu le plus de "pile".

Comme prix, il reçoit de l'autre joueur un nombre de bonbons égal à la différence de "pile" entre leurs deux scores (par exemple, si A obtient 1 "pile" et B 3 "pile", B reçoit deux bonbons de A).

Soient : X la variable aléatoire qui associe à ce jeu le nombre de "pile" du joueur A,

Y la variable aléatoire qui associe à ce jeu le nombre de "pile" du joueur B et

Z la variable aléatoire qui associe à ce jeu le gain du joueur A.

1) Déterminer la loi de probabilité de X, de Y et de Z.
2) Calculer la moyenne et l'écart-type de X, de Y et de Z.
3) On répète ce jeu vingt fois.
   Quelle est la probabilité que le joueur B gagne plus de 5 bonbons ?
4) Combien de fois A et B doivent-ils jouer à ce jeu pour que le joueur A ait 88% de chances de gagner moins de 10 bonbons ?