GYMNASE AUGUSTE PICCARD
Chemin de Bellerive 16, 1007 Lausanne
Tél. 021 / 557 8484 Fax 021 / 557 8485

**EXAMEN ECOLE DE MATURITÉ**
**Session de juin 2014**
**MATHÉMATIQUES – NIVEAU STANDARD**

| | |
|---|---|
| Groupes concernés : | 3M5, 3M6, 3M7, 3Mms1, 3Mms2, 3MS1, 3MSms1 |
| Horaire : | mardi 10 juin 2014, 8 h 15 - 12 h 15 |
| Matériel autorisé : | • formulaire officiel des gymnases (non annoté)<br>• table numérique CRM<br>• calculatrice de type reconnu |

Prière de ne rien inscrire sur la feuille de donnée

*Total des points : 75 points*

## Problème 1 (23 *points*)

On considère la fonction $f$ donnée par

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}$$

1.1. Etudier la fonction $f$. On demande l'ensemble de définition, le signe, les équations des asymptotes, la position relative du graphe et de l'asymptote oblique, la dérivée, les coordonnées des extremums et l'esquisse du graphe.

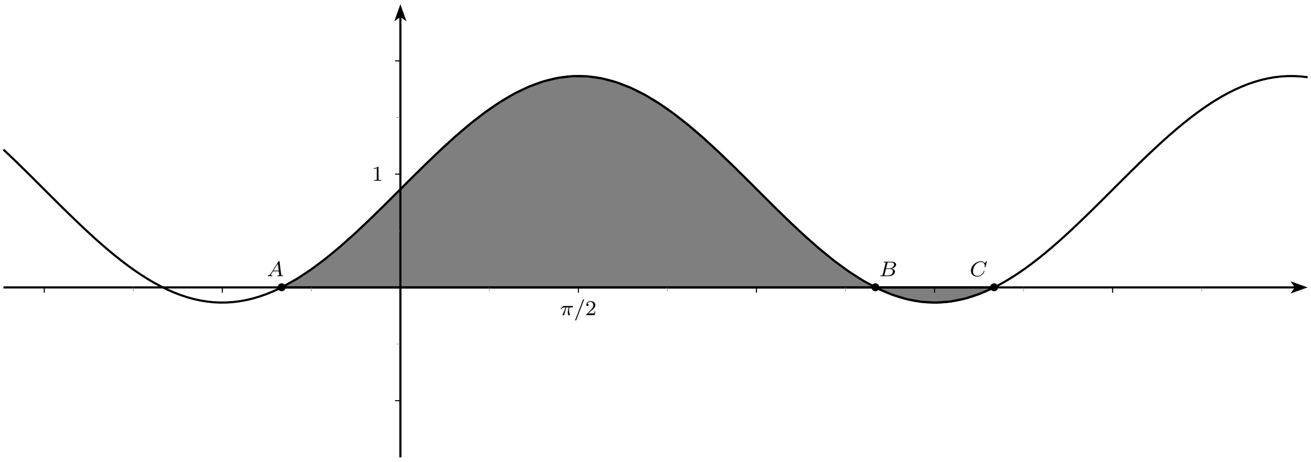
1.2. Vérifier que

$$f(x) = x + 4 + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

1.3. Calculer l'aire du domaine borné limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et le graphe de $f$.

## **Problème 2** (8 *points*)

Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = \sin(x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est en partie représenté ci-dessous :




2.1. Calculer les coordonnées des points $A$, $B$ et $C$.

2.2. Calculer l'aire géométrique du domaine grisé.

## **Problème 3** (10 *points*)

On considère trois urnes $U_1$, $U_2$ et $U_3$ contenant des boules de couleurs différentes.
Dans $U_1$, il y a 8 boules noires et 7 boules rouges ;
dans $U_2$, 6 boules noires, 14 boules rouges et 5 boules jaunes ;
dans $U_3$, 9 boules noires, 6 boules rouges et 5 boules blanches.

3.1. En tirant une boule au hasard de chacune des trois urnes,

   3.1.1. quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?

   3.1.2. quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

   3.1.3. on a obtenu une boule blanche, une boule rouge et une boule noire. Quelle est la probabilité que la boule rouge provienne de l'urne $U_1$ ?

3.2. On tire une boule au hasard de l'urne $U_3$ et on la remet ensuite dans la même urne. On recommence une deuxième fois, une troisième, et ainsi de suite. Combien de fois au minimum faudra-t-il recommencer cette opération pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à 99,9% ?

## Problème 4 (17 *points*)

Relativement à un repère orthonormé, on donne :
- le cercle $\Gamma$ d'équation $x^2 + 12x + y^2 - 8y + 48 = 0$,
- les points $M(-4; 8)$ et $P(5; 6)$,
- la droite $d$ d'équation $x - 2y - 2 = 0$.

4.1. Déterminer le centre $C$ et le rayon $r$ du cercle $\Gamma$, puis vérifier que le point $M$ se situe à l'extérieur du cercle $\Gamma$.

4.2. Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma$ issues de $M$.

4.3. Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma$ perpendiculaires à la droite $d$.

4.4. Déterminer l'équation du cercle $\Gamma'$ centré en $P$ et tangent à la droite $d$.

4.5. Calculer l'aire du triangle $OPP'$, où $P'$ est le symétrique du point $P$ relativement à la droite $d$.

## Problème 5 (6 *points*)

5.1. De combien de manières peut-on inviter quatre personnes d'un groupe de douze personnes constitué de six couples mariés ?

5.2. Parmi ces invitations,

5.2.1. combien comprennent deux couples mariés ?

5.2.2. combien ne comprennent aucun couple marié ?

5.2.3. combien comprennent exactement un couple marié ?

## Problème 6 (11 *points*)

On considère le carré $ABCD$ formé par $A(-2; 2), B(2; 2), C(2; -2)$ et $D(-2; -2)$ ainsi que le point $P(0; 4)$. Soit $Q(m; -2)$, où $-2 \leq m \leq 2$, un point se déplaçant sur le segment $CD$. Soit $R$ l'intersection des segments $PQ$ et $AB$.

6.1. Faire un dessin de la situation.

6.2. Montrer que $R(\frac{m}{3}; 2)$.

6.3. Pour quelles coordonnées de $Q$ la somme des aires du triangle $ARD$ et du cercle de centre $P$ et de rayon $PR$ est-elle minimale ?