ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité 2014

Mathématiques standard

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Nom : Numéro : Classe :

Problème 1 (16 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x+3}{2} \ .$$

1.1 Étudier cette fonction (avec la dérivée seconde) et représenter sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

1.2 Soit D le domaine délimité par la droite d'équation $y = 2$ et la courbe de f pour x allant de 0 à 2. Montrer que l'aire de D est égale à $\ln(9)$.

1.3 Soit t la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$. Calculer l'angle aigu entre l'axe (Oy) et la tangente t.

Problème 2 (10 points)

Dans un repère orthonormé, on définit les éléments suivants :

– le plan $\alpha : x + 2y - 2z + 11 = 0$;

– la droite d : $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 6 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$;

– la sphère Σ : $(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.

2.1 Montrer que d est strictement parallèle à α, c'est-à-dire parallèle à α sans être contenue dans ce plan.

2.2 Calculer la distance entre d et α.

2.3 Vérifier que α et d sont tangents à Σ.

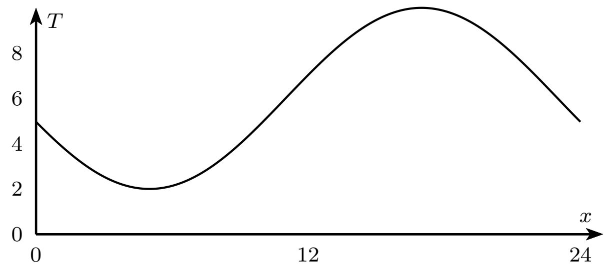
2.4 Déterminer l'équation cartésienne du seul plan β qui est à la fois tangent à Σ, perpendiculaire à α et strictement parallèle à d.

Problème 3 **(10 points)**

On admet que le 13 mars 2014, de 0h00 à 24h00, la température extérieure à Fribourg a suivi la loi

$$T(x) = 6 - 4\cos\left(\frac{\pi}{12}(x-5)\right)$$

où T désigne la température atteinte en degrés Celsius et x le temps écoulé en heures.



3.1 Quelle température faisait-il à 13h00 ?

3.2 Calculer la température maximale qu'il a fait et l'heure à laquelle elle a été atteinte.

3.3 A l'aide d'une intégrale, calculer la température moyenne qu'il a fait de 0h00 à 24h00.

3.4 Montrer à l'aide d'un calcul ou d'un raisonnement approprié que

$$\lim_{x\to 5} \frac{T(x) - T(5)}{x-5} = 0.$$

Problème 4 **(16 points)**

Une maman dispose de 6 bonbons à l'orange, de 5 bonbons au citron et de 4 bonbons à la framboise.

Les trois parties de ce problème peuvent être résolues indépendamment.

4.1 Elle prend au hasard 5 bonbons **simultanément** et les donne à son fils.

a) Quelle est la probabilité qu'il reçoive 5 bonbons à l'orange ?

b) Quelle est la probabilité qu'il reçoive 3 bonbons à l'orange et 2 bonbons au citron ?

c) Quelle est la probabilité qu'il reçoive au moins un bonbon à la framboise ?

4.2 Elle tire au hasard et **sans remise** des bonbons l'un après l'autre. Combien de bonbons au minimum doit-elle tirer pour que la probabilité qu'elle ait tiré au moins un bonbon à l'orange soit supérieure à 75% ?

4.3 Elle prend au hasard et **sans remise** 5 bonbons l'un après l'autre.

a) Quelle est la probabilité que les 2 premiers bonbons tirés soient à la framboise ?

b) Sachant qu'elle a tiré 2 bonbons à la framboise aux 2 premiers tirages, quelle est la probabilité que les 3 derniers bonbons tirés soient à l'orange ?

c) Montrer que la probabilité de l'événement « *les 3 derniers bonbons tirés sont à l'orange* » est égale à $\frac{4}{91}$.

d) Sachant qu'elle a tiré 3 bonbons à l'orange aux 3 derniers tirages, quelle est la probabilité qu'elle n'ait tiré que des bonbons à la framboise aux 2 premiers tirages ?