CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité académique 2013 **OS Physique - Applications des mathématiques**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

Problème 1

Étudier la courbe d'équations paramétriques : $x(t) = \dfrac{1}{t^2 - t - 2}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t+1}$.

Calculer les coordonnées des points à tangente verticale, horizontale, ainsi que les points de coupe avec les axes. Représenter cette courbe dans un système orthonormé (unité : 1cm).

Problème 2

Lorsque René le pêcheur capture un poisson, c'est une carpe 5 fois sur 10, une perche 4 fois sur 10 et un brochet 1 fois sur 10.

2.1 René capture 7 poissons. Calculer la probabilité des événements suivants.

A **:** Il a pêché 7 carpes.

B **:** Il a pêché exactement 5 carpes.

C **:** Il a pêché au moins 5 carpes.

D **:** Il a pêché 3 carpes, 3 perches et 1 brochet.

E **:** Il a pêché au moins deux espèces différentes.

F **:** Il a pêché exactement 1 brochet sachant qu'il a au moins 5 carpes.

2.2 Comme la loi stipule que l'on doit remettre à l'eau les poissons trop petits, René doit rejeter 20% des carpes, 5% des perches et 15% des brochets qu'il a pêchés.

a) Il pêche un poisson. Calculer la probabilité qu'il doive le remettre dans l'eau.

b) Sachant que René doit rejeter le poisson pêché, calculer la probabilité que ce soit une perche.

2.3 Pendant une année, René prélève $1'000$ poissons.

Quelle est la probabilité qu'il ait pêché entre 390 et 420 perches (bornes comprises) ?

Problème 3

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points $A(-9; -6; -3)$, $B(3; 9; 3)$, $C(18; 21; -3)$ et $D(-5; -1; -1)$.

3.1 Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.

3.2 Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

3.3 Calculer l'angle en B du triangle ABC.

3.4 Montrer que le point D appartient au segment $[AB]$.

3.5 Déterminer le centre et le rayon du cercle c, contenu dans le plan π, tangent à la droite (AB) en D et dont le centre appartient à la droite (AC).

3.6 Justifier le fait que B est le centre de la sphère Γ circonscrite au cône engendré par la rotation du segment $[AC]$ autour de la droite (AB), puis donner l'équation de cette sphère Γ.

3.7 Déterminer les équations paramétriques de la droite t tangente à la sphère Γ en C et coupant l'axe des y.

Problème 4

Les trois sections sont indépendantes.

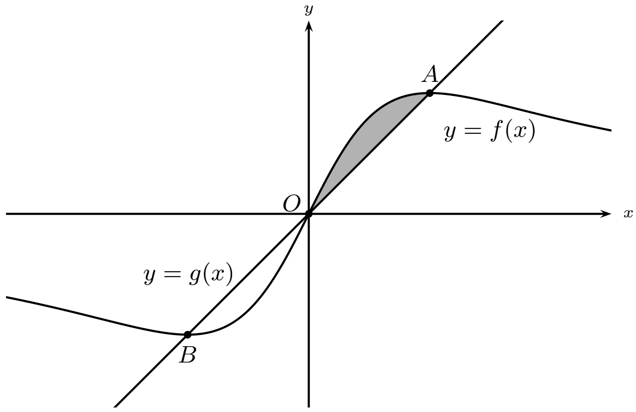
4.1 Soit l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 2y = e^{-x}$$

a) Déterminer la solution générale de cette équation.

b) Déterminer la solution particulière de cette équation qui s'annule au point d'abscisse $x = -2$.

4.2 On considère les fonctions f et g données par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $g(x) = x$ et dont les graphes sont esquissés ci-contre.



a) Déterminer les coordonnées des points A et B.

b) Déterminer l'aire du domaine grisé.

c) Calculer l'angle aigu d'intersection entre les graphes de f et g au point O.

4.3 Localiser, sur la parabole d'équation $y = 1 - x^2$, les points les plus proches de l'origine. Que vaut la distance minimale ?

Problème 5

On donne un vecteur v et la matrice M associée à un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$, exprimés relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

5.1 a) Calculer l'image du vecteur v par l'endomorphisme h. Que peut-on en déduire ?

b) Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme h et les sous-espaces propres associés.

c) Écrire la matrice D associée à h dans une base de vecteurs propres.

d) Déterminer la matrice de changement de base P telle que $M = PDP^{-1}$.

e) Calculer la matrice $E = \lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.

f) En utilisant la matrice E, déterminer la matrice $N = \lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

5.2 Dans un lycée imaginaire, l'endomorphisme h permet de modéliser l'évolution du nombre d'élèves d'année en année.

Si, en 2013, le lycée contient 500 élèves en première année, 250 élèves en deuxième et 125 élèves en troisième, alors, en 2014, le lycée contiendra 500 élèves en première, 400 élèves en deuxième et 175 élèves en troisième.

En effet, on a
$$\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 175 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 125 \end{pmatrix}$$

a) Quelle sera la répartition des élèves en 2015 ?

b) La première ligne de la matrice M s'interprète en disant que le nombre d'élèves de première est constant d'année en année.

Donner une interprétation pour la troisième ligne de la matrice M.

c) Donner une approximation du nombre d'élèves de chacune des trois années dans un futur lointain.