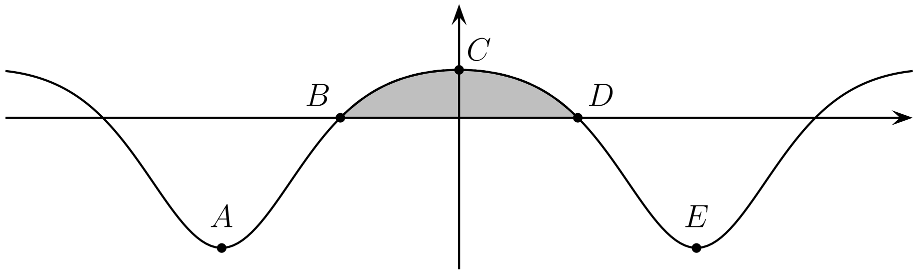
Problème 1 (poids 3)

On considère la fonction périodique f définie par

$$f(x) = 1 - e^{-\cos(x)}$$

et dont le graphe a l'allure suivante



La deuxième dérivée de f est $f''(x) = e^{-\cos(x)}(\cos^2(x) - \cos(x) - 1)$.

a) Calculer les coordonnées des points A, B, C, D et E.

b) Déterminer l'abscisse d'un point du graphe de f en lequel la pente de la tangente est maximale et calculer cette pente maximale.

c) Ecrire le polynôme de Taylor-MacLaurin de degré 2 de f. Estimer l'aire de la surface grisée en utilisant ce polynôme.

Pour un nombre réel fixé $m \neq 0$, on considère l'équation différentielle

$$y' - m\sin(x)y = -\sin(x)$$

d) Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle solution de l'équation différentielle ?

e) Résoudre l'équation différentielle pour $m = 2$.

Problème 2 (poids 3)

Première partie

Un nombre réel a étant fixé, on considère l'application linéaire f qui est décrite dans la base standard par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la valeur de a pour laquelle la matrice M_a n'est pas inversible.

b) Calculer les valeurs de k et a pour lesquelles $k \cdot M_a$ est une matrice orthogonale.

Deuxième partie

On considère l'application linéaire f qui est décrite dans la base standard par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Sachant que $\det(M - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$, trouver une base de V_3 constituée de vecteurs propres de f et donner la matrice de f dans cette base.

d) En utilisant les résultats précédents, décrire précisément la transformation géométrique associée à la matrice M^2.

e) Vérifier que $M^2 - 4M$ est un multiple de la matrice identité I. En déduire deux nombres α et β tels que $M^{-1} = \alpha \cdot M + \beta \cdot I$.

Problème 3 (poids 2)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} - i)z^2 + (7 + 2\sqrt{3}i)z - 7i$.

a) Calculer $P(i)$, puis déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Dans le plan de Gauss, on considère le triangle rectangle de sommets A, B et C, correspondants respectivement aux nombres complexes $z_A = i$, $z_B = \sqrt{3} + 2i$ et $z_C = \sqrt{3} - 2i$.

b) Déterminer le module et l'argument de $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

Soit la fonction f définie par $f(z) = (1 + i)z + 1$.

c) Déterminer le point fixe de la transformation f, et donner l'interprétation géométrique détaillée la plus simple de f.

On réitère la fonction f successivement n fois : on considère donc la composition

$$g_n(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(z).$$

d) Donner l'interprétation géométrique la plus simple de $g_4 = f \circ f \circ f \circ f$.

e) Déterminer la valeur minimale de $n \in \mathbb{N}$ de sorte que la fonction g_n envoie le triangle ABC sur un triangle dont l'aire est supérieure à 100.

Problème 4 (poids 2)

Lors d'un jeu télévisé, l'animateur présente dix boîtes opaques et extérieurement identiques. Leur contenu est le suivant :

- Une boîte contient Frs. 400.–
- Deux boîtes contiennent chacune Frs. 200.–
- Trois boîtes contiennent chacune Frs. 100.–
- Les quatre autres boîtes sont vides.

Un concurrent choisit au hasard une boîte. Si cette boîte contient de l'argent, le concurrent gagne la somme contenue dans cette boîte. Cette boîte est alors retirée du jeu et le concurrent choisit une nouvelle boîte. Ainsi de suite. Le jeu s'arrête dès que le concurrent choisit une boîte vide.

a) Quelle est la probabilité qu'un concurrent ne gagne rien ?

b) Quelle est la probabilité qu'un concurrent gagne exactement Frs. 300.– ?

c) Quelle est la probabilité qu'un concurrent ouvre exactement quatre boîtes ?

d) Quelle est la probabilité qu'un concurrent n'ait rien gagné, sachant qu'il a gagné moins de Frs. 200.– ?

e) Quelle est la probabilité qu'un concurrent gagne Frs. 1100.– ?

f) Parmi un groupe de cinq concurrents, quelle est la probabilité que plus de deux d'entre eux ne gagne rien ?

g) On forme un groupe de N concurrents pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux ne gagne rien dépasse 99,9%. Déterminer la valeur minimale de N.

Problème 1

$f'(x) = -\sin(x)e^{-\cos(x)}$

a) $A(-\pi; 1-e) \cong (-3.14; -1.72)$, $B(-\frac{\pi}{2}; 0) \cong (-1.57; 0)$, $C(0, 1-e^{-1}) \cong (0; 0.63)$, $D(\frac{\pi}{2}; 0) \cong (1.57; 0)$, $E(\pi; 1-e) \cong (3.14; -1.72)$

b) $f''(x)$ nulle lorsque $\cos(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (le cas "+" est exclu), donc $x \cong \pm 2.237$ et la pente maximale est $f'(-2.237) \cong 1.459$

c) Polynôme de MacLaurin : $P_2(x) = 1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e}\,x^2$

$$\text{Aire} = 2\int_0^{\pi/2} f(x)dx \cong 2\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e}\,x^2\right)dx = 2\left[x - \frac{1}{e}x - \frac{1}{6e}\,x^3\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{e} - \frac{\pi^3}{24e} \cong 1.51$$

Variante : le graphe de $P_2(x)$ coupe l'axe Ox lorsque $x = \pm\sqrt{2e-2}$ et on peut envisager l'approximation

$$\text{Aire} \cong 2\left[x - \frac{1}{e}x - \frac{1}{6e}\,x^3\right]_0^{\sqrt{2e-2}} = \frac{4(e-1)}{3e}\sqrt{2e-2} \cong 1.5624.$$

d) $m = 1$ (par substitution)

e) $y' = 2\sin(x)y - \sin(x)$, $a(x) = 2\sin(x)$, $A(x) = -2\cos(x)$, $u(x) = e^{-2\cos(x)}$, $v'(x) = -\sin(x)e^{2\cos(x)}$, $v(x) = \frac{1}{2}e^{2\cos(x)} + C$, $y = uv = \frac{1}{2} + Ce^{-2\cos(x)}$

Problème 2

a) $\det(M_a) = a^3 - 6a + 9 = (a+3)(a^2 - 3a + 3)$, $a = -3$, $\Delta(1, -3, 3) = -3 < 0$

b) $a = -\dfrac{2}{3}$, $k = \pm\dfrac{3}{7}$

c) Pour $\lambda = -1$, on a un plan propre d'équation $x + y + z = 0$. Comme la matrice est symétrique, le vecteur normal de ce plan est aussi un vecteur propre (pour $\lambda = 5$).

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad M' = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

d) Affinité orthogonale de facteur 25 par rapport au plan $\pi : x + y + z = 0$ (projection orthogonale sur le plan $\pi : x + y + z = 0$ puis homothétie de facteur 25 par rapport à cette projection).

e) $M^2 - 4M = 5I$, donc $M^{-1} = \frac{1}{5}(M - 4I)$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = -\frac{4}{5}$

Problème 3

a) $P(i) = 0$, $P(z) = (z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 7)$, $\Delta(1, -2\sqrt{3}, 7) = -16$,
$z = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 4i}{2} = \sqrt{3} \pm 2i$, donc $P(z) = 0$ pour $z \in \{i, \sqrt{3} \pm 2i\}$.

b) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i} = \dfrac{4\sqrt{3}\,i}{12} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{3}$, module $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, argument $= \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(z) = z \iff iz + 1 = 0 \iff z = i$, $f = \mathrm{Rot}(C(0;1), 45°) \circ \mathrm{Hom}(C(0;1), \sqrt{2})$

d) $g_4 = \mathrm{Rot}(C(0;1), 180°) \circ \mathrm{Hom}(C(0;1), 4) = \mathrm{Hom}(C(0;1), -4)$

e) Le triangle ABC est rectangle en A et son aire est

$$\frac{1}{2} \cdot |z_B - z_A| \cdot |z_C - z_A| = \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{3}+i| \cdot |\sqrt{3}-3i| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{12} = \sqrt{12}$$

On veut $2^n\sqrt{12} > 100$, donc $n > \log_2\left(\dfrac{100}{\sqrt{12}}\right) \cong 4.85$, donc $n = 5$

Problème 4

a) $\mathbb{P}(0) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

b) $\mathbb{P}(300) = \mathbb{P}(100+100+100+0) + \mathbb{P}(100+200+0) + \mathbb{P}(200+100+0)$
$= \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{4}{8} \cdot 2 = \dfrac{360}{5040} = \dfrac{1}{14}$

c) $\mathbb{P}(\overline{0} + \overline{0} + \overline{0} + 0) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{480}{5040} = \dfrac{2}{21}$

d) $\mathbb{P}(< 200) = \mathbb{P}(0) + \mathbb{P}(100+0) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{8}{15}$
$\mathbb{P}(0| < 200) = \dfrac{2/5}{8/15} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

e) $\mathbb{P}(1100) = \mathbb{P}(\langle 100+100+100+200+200+400\rangle + 0) = 60\dfrac{1}{10}\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{8}\dfrac{3}{7}\dfrac{2}{6}\dfrac{1}{5}\dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{210}$

f) $\dbinom{5}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \dbinom{5}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^4\left(\dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{2}{5}\right)^5 = \dfrac{720+240+32}{3125} = \dfrac{992}{3125}$

g) $1 - (0.6)^N > 0.999$, $\quad (0.6)^N < 0.001$, $\quad N\ln(0.6) < \ln(0.001)$,
$N > \dfrac{\ln(0.001)}{\ln(0.6)} \cong 13.52$, $\quad N = 14$