Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (17 points)

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1.1 Montrer que la fonction f est continue en $x = 0$.

1.2 Calculer l'angle aigu que forme le graphe de f en son point anguleux.

1.3 Etudier f, sans la parité ni la dérivée seconde, puis représenter son graphe dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

1.4 Calculer l'aire du domaine situé entre les verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$, et délimité par le graphe de f et la droite d'équation $y = -1$.

Problème 2 (5 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$.

Pour $a > 0$, on définit les 3 points suivants : $P(a; f(a))$, $B(0; f(a))$ et A, le point d'intersection de l'axe des y avec la tangente au graphe de f au point P.

Déterminer la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle PAB est maximale.

Problème 3 (8 points)

Dans V_3 muni d'une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère l'endomorphisme noté f tel que :

$$f(\vec{j}+\vec{k}) = 3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}; \qquad f(\vec{i}+\vec{k}) = \vec{j}; \qquad f(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

3.1 Déterminer les composantes de la matrice de f dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Pour la suite de l'exercice, on considère l'endomorphisme f dont la matrice est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

3.3 Caractériser géométriquement f.

3.4 Donner l'ensemble des invariants de l'endomorphisme $f \circ f$.

Problème 4 (9 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $P(2;-1;3)$ et $Q(1;3;2)$ ainsi que les plans α et β donnés par les équations :

$$\alpha : x + 8y - z - 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta : 3x - 2y + 6z - 1 = 0$$

4.1 Montrer que P et Q sont situés de part et d'autre du plan α.

4.2 On considère l'ensemble de tous les points du plan α situés à égale distance de P et Q. Déterminer les équations paramétriques de cet ensemble de points.

4.3 Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente au plan β, qui passe par P et Q et dont le centre se trouve dans le plan α.

Problème 5 (14 points)

Dans le tableau ci-dessous, on décrit 15 nombres à 4 chiffres et, pour chaque nombre, la somme S des 4 chiffres.

1111 $\rightarrow S = 4$	**1222** $\rightarrow S = 7$	**2223** $\rightarrow S = 9$
1112 $\rightarrow S = 5$	**1133** $\rightarrow S = 8$	**1333** $\rightarrow S = 10$
1113 $\rightarrow S = 6$	**1223** $\rightarrow S = 8$	**2233** $\rightarrow S = 10$
1122 $\rightarrow S = 6$	**2222** $\rightarrow S = 8$	**2333** $\rightarrow S = 11$
1123 $\rightarrow S = 7$	**1233** $\rightarrow S = 9$	**3333** $\rightarrow S = 12$

Chacun de ces nombres à 4 chiffres est écrit sur une étiquette différente. On insère les 15 étiquettes ainsi définies dans une boîte et on propose le jeu suivant :

Jean tire une étiquette au hasard dans la boîte, la remet dans la boîte, puis Claude tire aussi au hasard une étiquette et la remet dans la boîte. Le vainqueur est celui qui a obtenu la somme des chiffres la plus élevée (par exemple, si Jean tirait l'étiquette "1113" et Claude l'étiquette "2233", alors le vainqueur serait Claude car la somme de ses chiffres, 2+2+3+3=10, est supérieure à celle de Jean). La partie est nulle si les deux joueurs obtiennent la même somme.

5.1 Montrer que la probabilité que Claude gagne est $\dfrac{98}{225}$.

5.2 Sachant que Jean obtient une somme de 8, quelle est la probabilité que Claude gagne ?

5.3 Si Claude gagnait, quelle serait la probabilité que la somme des chiffres de l'étiquette de Jean soit égale à 8 ?

5.4 Soit X la variable aléatoire associant 2 points en cas de victoire de Claude, 1 point en cas de partie nulle et 0 point en cas de défaite.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Montrer que son espérance est 1 et que son écart-type est $\dfrac{14}{15}$.

5.5 Soit S_k la somme des points accumulés par Claude après avoir joué k fois à ce jeu.
A l'aide du théorème limite central, calculer la plus petite valeur de k pour que $P(S_k \geq 100) \geq 97.5\%$.