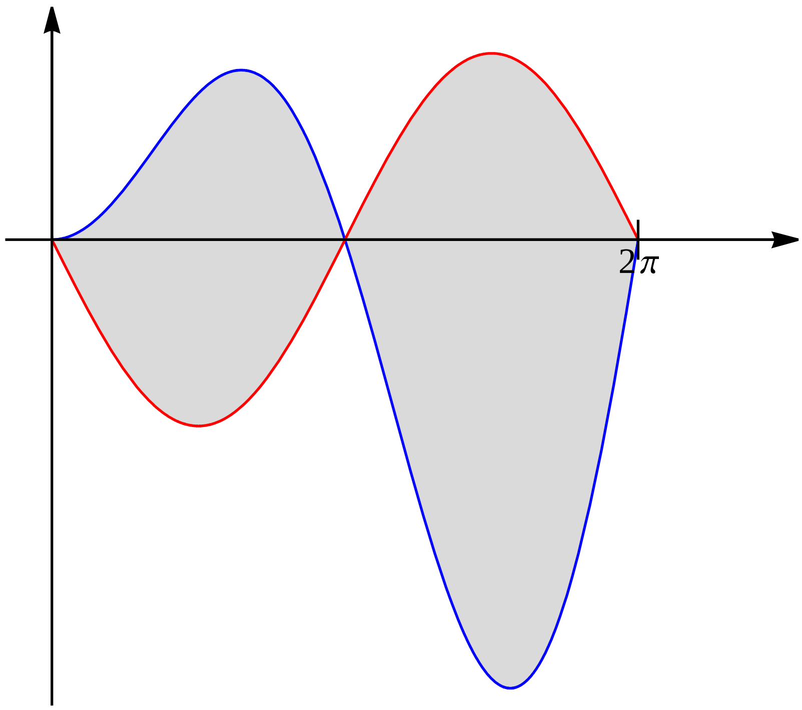
Problème 1 (poids 2)

Première partie

a) Étudier la fonction f définie par $f(x)=(x+2)^2 \cdot e^{-x}$.
On demande : domaine de définition, points d'intersection du graphe et des axes, équations des éventuelles asymptotes, coordonnées des points à tangente horizontale, tableau des variations, représentation graphique avec une unité égale à deux carreaux.

Deuxième partie

On a représenté ci-dessous les graphes des fonctions $f(x)=-2\sin(x)$ et $g(x)=x\cdot\sin(x)$ pour $x\in[0;2\pi]$.



b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de g en son point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$.

c) Calculer les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de f.
On ne donnera que les points dont l'abscisse est dans l'intervalle $[0;2\pi]$.

d) La droite d'équation $y=2x+b$, avec $b\in\mathbb{R}$, est tangente au graphe de f au point P dont l'abscisse est comprise entre 0 et 2π. Déterminer la valeur de b.

e) En employant la méthode d'intégration par parties, calculer l'aire de la surface grisée comprise entre les deux graphes.

Problème 2 (poids 2)

Remarque *: Pour tous les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4).*
Employer différentes couleurs et dessiner les parties invisibles en traitillé.

On considère le plan $\pi : 3x + 2y - 2z - 6 = 0$ et la droite $d : \begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) Dessiner les traces du plan π, la droite d ainsi que la droite d_2, projection de la droite d dans le mur.

b) Montrer que l'équation du plan α qui contient la droite d et qui est parallèle à l'axe Ox est $\alpha : y + z - 2 = 0$.

c) Dessiner les traces du plan α puis la droite d'intersection des deux plans π et α.

d) Calculer l'angle aigu formé par la droite d et la paroi.

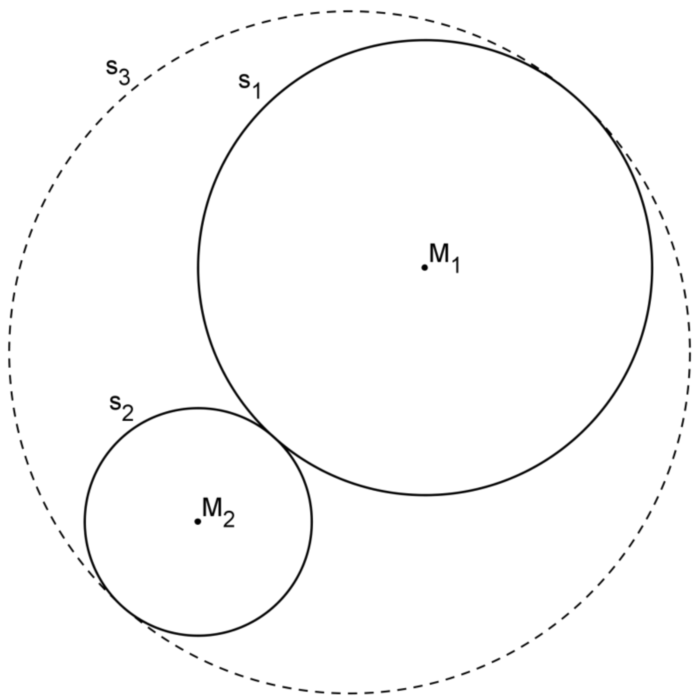
On considère encore deux sphères,
$s_1 : (x-1)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 36$ et $s_2 : (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

e) Montrer que le point $P(5;2;1)$ appartient aux deux sphères.

f) Trouver un vecteur directeur de la droite t qui est tangente à la sphère s_1 au point P et qui est parallèle au plan π.

g) Expliquer pourquoi P est le seul point qui appartient aux deux sphères.

h) Déterminer le rayon et le centre de s_3, qui est la plus petite sphère contenant les deux sphères s_1 et s_2 (voir le schéma ci-dessous).



Problème 3 (poids 1)

Une urne contient 100 jetons dont 60 sont bleus et 40 rouges.

Parmi les jetons bleus, 24 sont marqués d'un cercle, 12 sont marqués d'un losange et les autres sont marqués d'une étoile.

Parmi les jetons rouges, 8 sont marqués d'un cercle, x sont marqués d'un losange et les autres sont marqués d'une étoile (x est un nombre entier).

Première partie

On tire au hasard, successivement et avec remise, 6 jetons de l'urne.

a) Quelle est la probabilité de tirer au moins un jeton rouge ?

b) Quelle est la probabilité de tirer plus de jetons bleus que de rouges ?

c) Calculer la probabilité que lors de ces 6 tirages on obtienne au moins un jeton bleu marqué d'un cercle.

d) Déterminer le nombre minimal de tirages nécessaires (différent de 6) pour que la probabilité d'obtenir au moins un jeton bleu marqué d'un cercle soit supérieure à 90%.

Deuxième partie

On tire au hasard un seul jeton de l'urne.

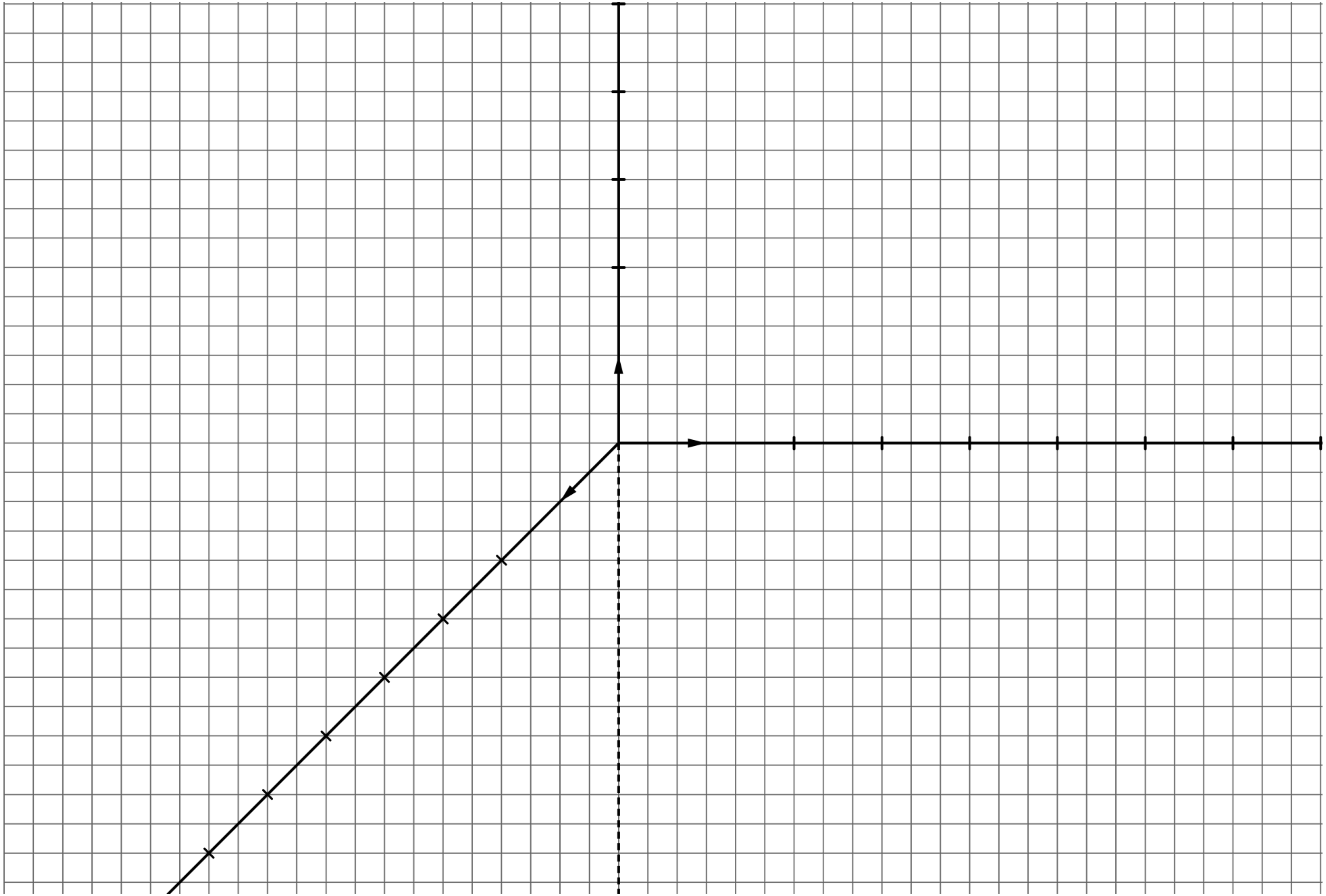
e) Montrer que la probabilité de tirer un jeton marqué d'un losange est égale à $0.12+\frac{x}{100}$.

f) Déterminer la valeur de x pour que la probabilité de tirer un jeton marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un jeton marqué d'une étoile.

g) On suppose **pour cette question uniquement** que $x=20$.
Calculer la probabilité qu'on ait tiré un jeton bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

h) Déterminer la valeur de x pour que les événements « tirer un jeton bleu » et « tirer un jeton marqué d'un losange » soient indépendants.

Nom et prénom : Classe :



Problème 1 (solution)

Première partie

$y=(x+2)^2\cdot \mathrm{e}^{-x}$

a) $D=\mathbb{R}$

$Ix(-2;0)$, $Iy(0;4)$

$x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty$

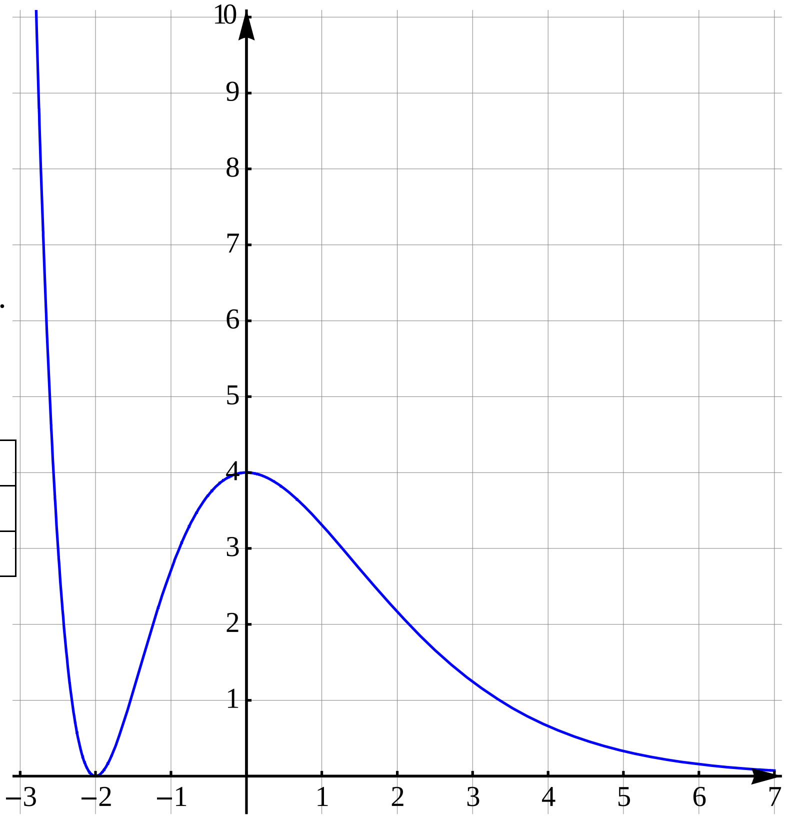
$x\to+\infty \Rightarrow y\xrightarrow{>}0$

et la droite $y=0$ est une asymptote horizontale à droite.

$y'=\left(-x^2-2x\right)\cdot \mathrm{e}^{-x}$

$H_1(-2;0)$, $H_2(0;4)$

x		-2		0	
y'	–	0	+	0	–
y	↘	min	↗	max	↘



Deuxième partie

$f(x)=-2\sin(x)$ et $g(x)=x\cdot\sin(x)$

b) Le point de contact est $T\left(\frac{3\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$, $g'(x)=x\cdot\cos(x)+\sin(x)$, $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ et une équation de la tangente est $y=-x$.

c) $f'(x)=-2\cos(x)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=0$, d'où $H_1\left(\frac{\pi}{2};-2\right)$ et $H_2\left(\frac{3\pi}{2};2\right)$

d) $y=2x+b$, la pente vaut 2, $f'(x)=2\Leftrightarrow\cos(x)=-1\Rightarrow x=\pi$, donc le point de contact est $P(\pi;0)$, d'où $2\pi+b=0$ et $b=-2\pi$

e) L'aire de la surface vaut $\int_0^{\pi}\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$,

$g(x)-f(x)=(x+2)\cdot\sin(x)=h(x)$,

calculons $H(x)$, une primitive de $h(x)$

$H(x)=\int(x+2)\cdot\sin(x)\mathrm{d}x=(x+2)\cdot(-\cos(x))-\int-\cos(x)\mathrm{d}x$

$H(x)=(-x-2)\cdot\cos(x)+\sin(x)$

L'aire de la surface vaut $H(\pi)-H(0)-H(2\pi)+H(\pi)$

$H(\pi)=\pi+2$, $H(0)=-2$, $H(2\pi)=-2\pi-2$

L'aire vaut $\pi+2+2+2\pi+2+\pi+2=4\pi+8\cong 20.57$

Problème 2 (solution)

$\pi : 3x + 2y - 2z - 6 = 0$, $d : \begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) Le plan π coupe les axes en $I_x(2;0;0)$, $I_y(0;3;0)$ et $I_z(0;0;-3)$.
Les traces de *d* sont $T_m(0;-1;3)$, $T_p(2;0;2)$ et $T_s(6;2;0)$
La droite d_2 coupe les axes en $I_y(0;2;0)$ et $I_z(0;0;2)$.

b) $\vec{n}_\alpha = \vec{d} \times \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\alpha : y + z - 2 = 0$.

c) Le plan α coupe les axes en $I_y(0;2;0)$ et $I_z(0;0;2)$.
Les traces de la droite d'intersection sont $T_m\left(0;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $T_p\left(\frac{10}{3};0;2\right)$ et $T_s\left(\frac{2}{3};2;0\right)$

d) $\vec{d} \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{6}$, $\varphi = 90° - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cong 24.09°$

$s_1 : (x-1)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 36$, donc $M_1(1;6;-1)$ et $r_1 = 6$,
$s_2 : (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$, donc $M_2(7;0;2)$ et $r_2 = 3$.

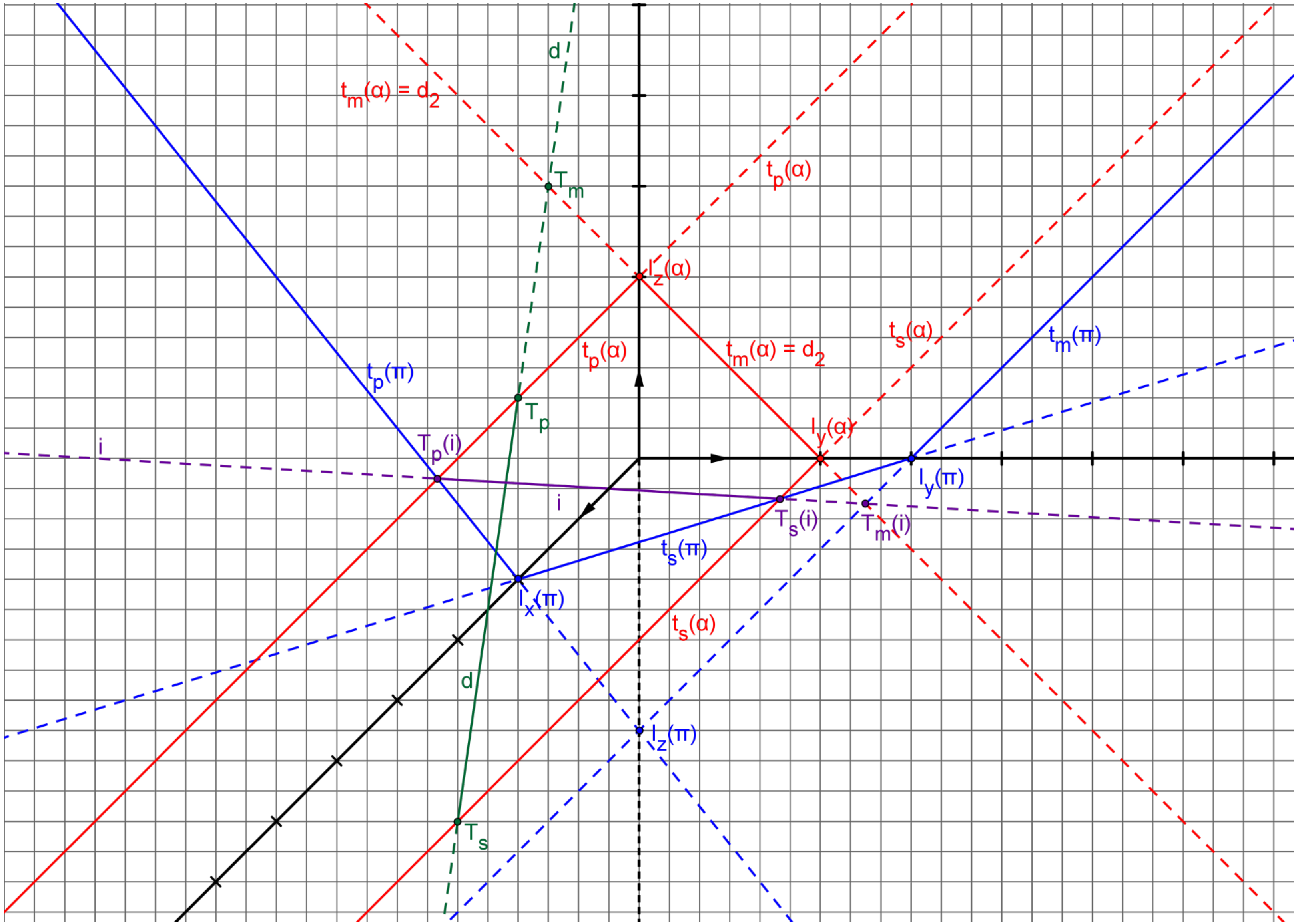
e) $P(5;2;1) \in s_1$ car $(5-1)^2 + (2-6)^2 + (1+1)^2 = 36$ et
$P(5;2;1) \in s_2$ car $(5-7)^2 + 2^2 + (1-2)^2 = 9$

f) $\overrightarrow{M_1P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

g) $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = 9 = r_1 + r_2$ donc les sphères sont tangentes et P est le point de contact. Autre argument : $\overrightarrow{M_1M_2} // \overrightarrow{M_1P}$, donc les points M_1, M_2 et P sont alignés.

h) On a $2r_1 + 2r_2 = 2r_3 \Rightarrow r_3 = r_1 + r_2 = 9$
M_3 est le milieu du segment PM_1, donc $M_3(3;4;0)$

Problème 2 (solution)



Problème 3 (solution)

On peut représenter la répartition des jetons par le tableau suivant :

	Cercle	Losange	Étoile	Total
Bleu	24	12	24	60
Rouge	8	x	$32 - x$	40
Total	32	$12 + x$	$56 - x$	100

a) $1 - 0.6^6 = 95.3\%$

b) $\binom{6}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 + \binom{6}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4 + 0.6^6 = 54.4\%$

c) $1 - 0.76^6 = 80.7\%$

d) $0.76^n < 0.1 \Rightarrow n > \frac{\log(0.1)}{\log(0.76)} = 8.39$ donc 9 tirages

e) Il y a $12 + x$ jetons marqués d'un losange, 100 jetons au total, donc $p = \frac{12+x}{100} = 0.12 + \frac{x}{100}$

f) Le nombre de jetons marqués d'un losange doit être égal au nombre de jetons marqués d'une étoile, donc $12 + x = 56 - x \Rightarrow 2x = 44 \Rightarrow x = 22$

g) Il y a $12 + 20 = 32$ jetons marqués d'un losange, parmi ceux-ci 12 sont bleus, donc $p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 37.5\%$

h) Si on veut que l'événement « tirer un jeton marqué d'un losange » soit indépendant de la couleur du jeton, il faut que la proportion des jetons marqués d'un losange soit la même pour les deux couleurs. Comme 20% des jetons bleus sont marqués d'un losange, x doit être égal au 20% des jetons rouges, soit 8.

Avec une approche plus théorique (A et B sont indépendants si $p(A/B) = p(A)$), la probabilité de tirer un jeton bleu vaut 0.6, la probabilité de tirer un jeton bleu sachant qu'il est marqué d'un losange vaut $\frac{12}{12+x}$.
On a donc l'équation $0.6 = \frac{12}{12+x} \Rightarrow 0.6x + 7.2 = 12 \Rightarrow x = \frac{4.8}{0.6} = 8$

Avec la même formule mais en permutant les rôles de A et B, la probabilité de tirer un jeton marqué d'un losange vaut $0.12 + \frac{x}{100}$, la probabilité de tirer un jeton marqué d'un losange sachant qu'il est bleu vaut 0.2.
On a cette fois l'équation $0.12 + \frac{x}{100} = 0.2 \Rightarrow \frac{x}{100} = 0.08 \Rightarrow x = 8$