ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité 2013

Mathématiques standard

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Nom : Numéro : Classe :

Problème 1 (13 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

1.1 Etudier cette fonction (en calculant la deuxième dérivée) et représenter sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 5 carrés).

1.2 Parmi les tangentes au graphe de f, il y a en une dont la pente est inférieure à celles des autres. Donner la pente de cette tangente, les coordonnées de son point de tangence au graphe de f et son équation.

Problème 2 (15 points)

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole γ d'équation

$$y = (x - 3)^2 + 1$$

et la droite d qui passe par les points $(2; -1)$ et $(5; 5)$. Le domaine borné délimité par γ et d est appelé $\mathcal{D}$.

2.1 Déterminer l'équation de d.

2.2 Représenter γ, d et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé (unité : deux carrés).

2.3 Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

2.4 Calculer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe d'équation $y = 1$.

2.5 Soit $\delta : [3; 5] \to \mathbb{R}$ la fonction qui donne l'écart vertical positif entre γ et d.

   a) Montrer que $\delta(x) = -x^2 + 8x - 15$ pour $x \in [3; 5]$.

   b) Déterminer l'abscisse $x \in [3; 5]$ pour laquelle l'écart vertical positif entre γ et d est maximal et calculer cet écart maximal.

Problème 3 **(14 points)**

Dans un repère orthonormé, on définit les éléments suivants :

- les points $A(5\,;2\,;-3)$, $B(4\,;2\,;-2)$ et $C(5\,;4\,;-4)$
- la droite d d'équations paramétriques

$$d\ :\ \begin{cases} x = & -1+2k \\ y = & 5-3k \\ z = & 7-6k \end{cases}$$

- la sphère Σ_1 de centre C et de rayon $r_1 = 14$
- la sphère Σ_2 d'équation

$$\Sigma_2\ :\ x^2+y^2+z^2-6x-14y-4z+13=0$$

3.1 On nomme α le plan qui contient les points A, B et C.
  a) Déterminer l'équation cartésienne du plan α.
  b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I du plan α et de la droite d.
  c) Dans le repère orthonormé **donné sur la feuille suivante**, représenter le point I et les traces du plan α, ce qu'on peut faire en calculant les points d'intersection de α avec les axes de coordonnées et en reliant ces points.

3.2 Donner l'équation de la sphère Σ_1.

3.3 Déterminer les équations des plans tangents à Σ_1 qui sont perpendiculaires à la droite d.

3.4 Déterminer si les sphères Σ_1 et Σ_2 sont sécantes, tangentes ou disjointes. Justifier la réponse.

Problème 4 **(11 points)**

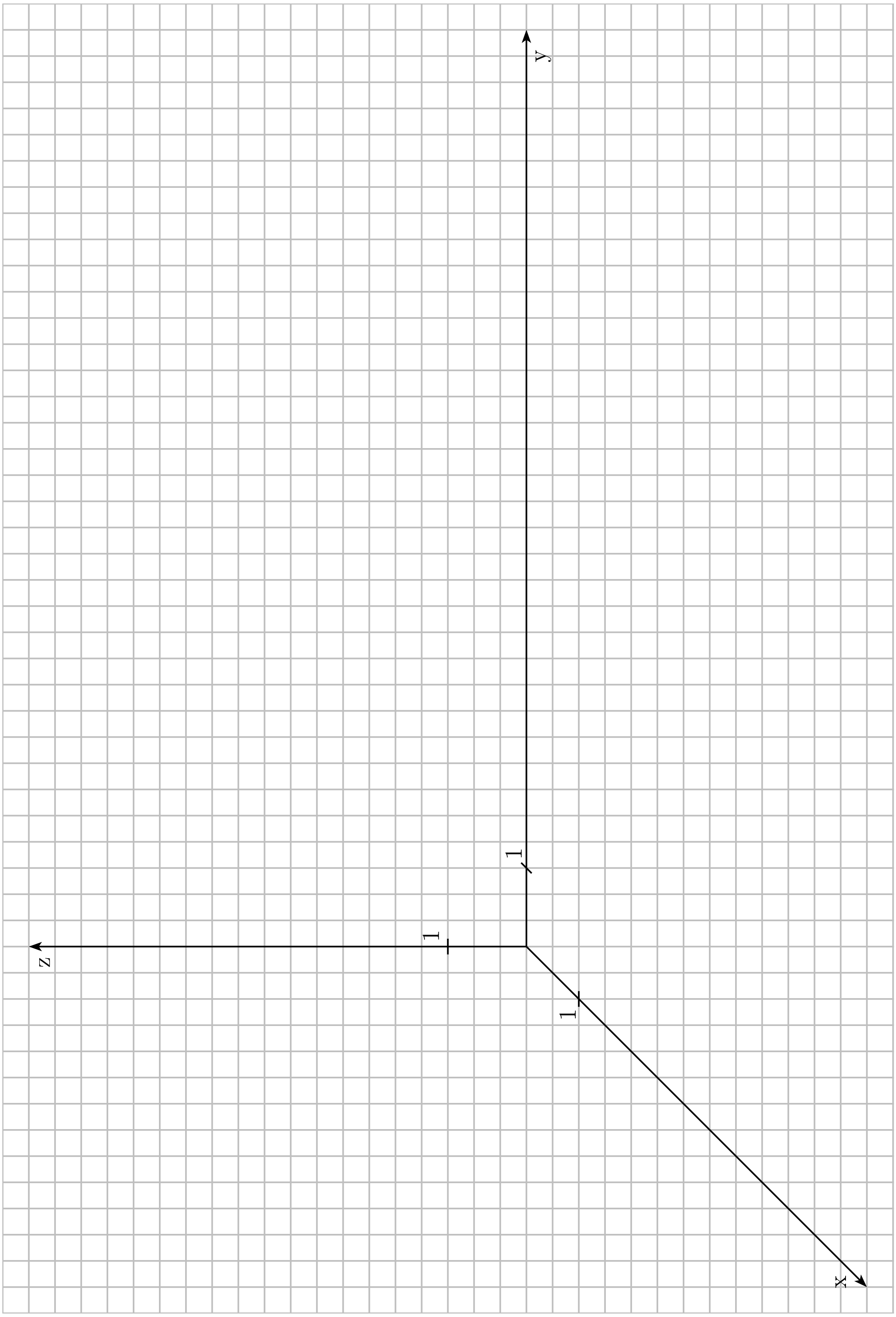
Un jardinier veut semer cinq graines d'une variété de fleurs rouges, dix graines d'une variété de fleurs jaunes et dix graines d'une variété de fleurs bleues. Chacune des graines peut donner au plus une fleur, et la probabilité qu'une graine de la variété rouge donne une fleur est de 75%, celle qu'une graine de la variété jaune donne une fleur est de 60% et celle qu'une graine de la variété bleue donne une fleur est de 15%. Afin d'obtenir un mélange de couleurs aléatoire, le jardinier mélange soigneusement les graines avant de les semer l'une après l'autre en ligne droite.

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

4.1 Le jardinier s'intéresse à l'évolution de la première graine qu'il a semée.
  a) Quelle est la probabilité qu'elle donne une fleur ?
  b) Après quelques temps, il constate qu'elle va donner une fleur. Quelle est la probabilité que cette fleur soit bleue ?

4.2 Le jardinier s'interroge à propos du nombre de fleurs jaunes qu'il va avoir.
  a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins une fleur jaune ?
  b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement six fleurs jaunes ?

4.3 C'est une année exceptionnelle et le jardinier constate que toutes les graines vont donner une fleur. Quelle est la probabilité que les cinq fleurs rouges soient côte à côte ?


y
1
1
z
1
x

Problème 1

1.1 $D_f =]-1;+\infty[$

x		-1		0	
$f(x)$	$\|$	$\|$	$-$	0	$+$

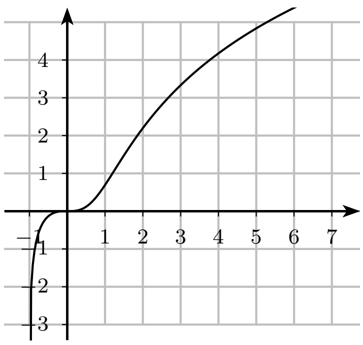
A.V. : $x=-1$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

x		-1		0	
$f'(x)$	$\|$	$\|$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\|$	$\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$$f''(x) = \frac{-3x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$$

x		-1		0		$\sqrt[3]{2}$	
$f''(x)$	$\|$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\|$	$\|$	$\cap$	Inf	$\cup$	Inf	$\cap$

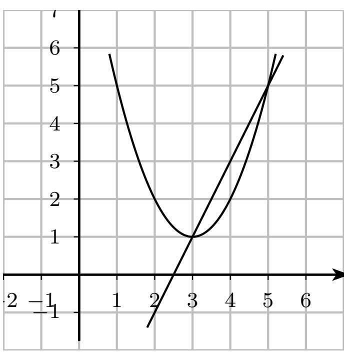


1.2 Tangente au point $(0;0)$, de pente 0 et d'équation $y=0$.

Problème 2

2.1 $d:\; y = 2x-5$

2.2



2.3

$$\frac{1+5}{2}\cdot 2 - \int_3^5 \left((x-3)^2+1\right)dx = \frac{4}{3}$$

2.4

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_3^5 \pi(f(x)-1)^2 dx = \frac{64}{15}\pi$$

2.5 a)

$$(2x-5)-(x^2-6x+10) = -x^2+8x-15$$

b) L'écart est maximal pour $x=4$ et il vaut $\delta(4)=1$.

Problème 3

3.1 a) $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ et $\alpha: \ 2x + y + 2z - 6 = 0$

b) $I(1;2;1)$

c) Voir feuille suivante

3.2

$$\Sigma_1: \ (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2 = 196$$

3.3 Les équations des plans sont

$$\beta_1: \ 2x - 3y - 6z + 76 = 0 \qquad \beta_2: \ 2x - 3y - 6z - 120 = 0$$

On peut les trouver en observant que $\vec{d}$ est normal à ces plans et que leur distance à C vaut 14. Ce n'est pas obligatoire, mais si on recherche les points de tangence, ils sont $T_1(1;10;8)$ et $T_2(9;-2;-16)$.

3.4 Le centre de Σ_2 est $D(3;7;2)$ et son rayon est $r_2 = 7$. Les sphères sont tangentes intérieurement car $\delta(C;D) + r_2 = r_1$.

Problème 4

4.1 a)

$$P(F) = 0.2 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.15 = 0.45$$

b)

$$P(B \mid F) = \frac{0.4 \cdot 0.15}{0.45} = 0.1\bar{3}$$

4.2 a)

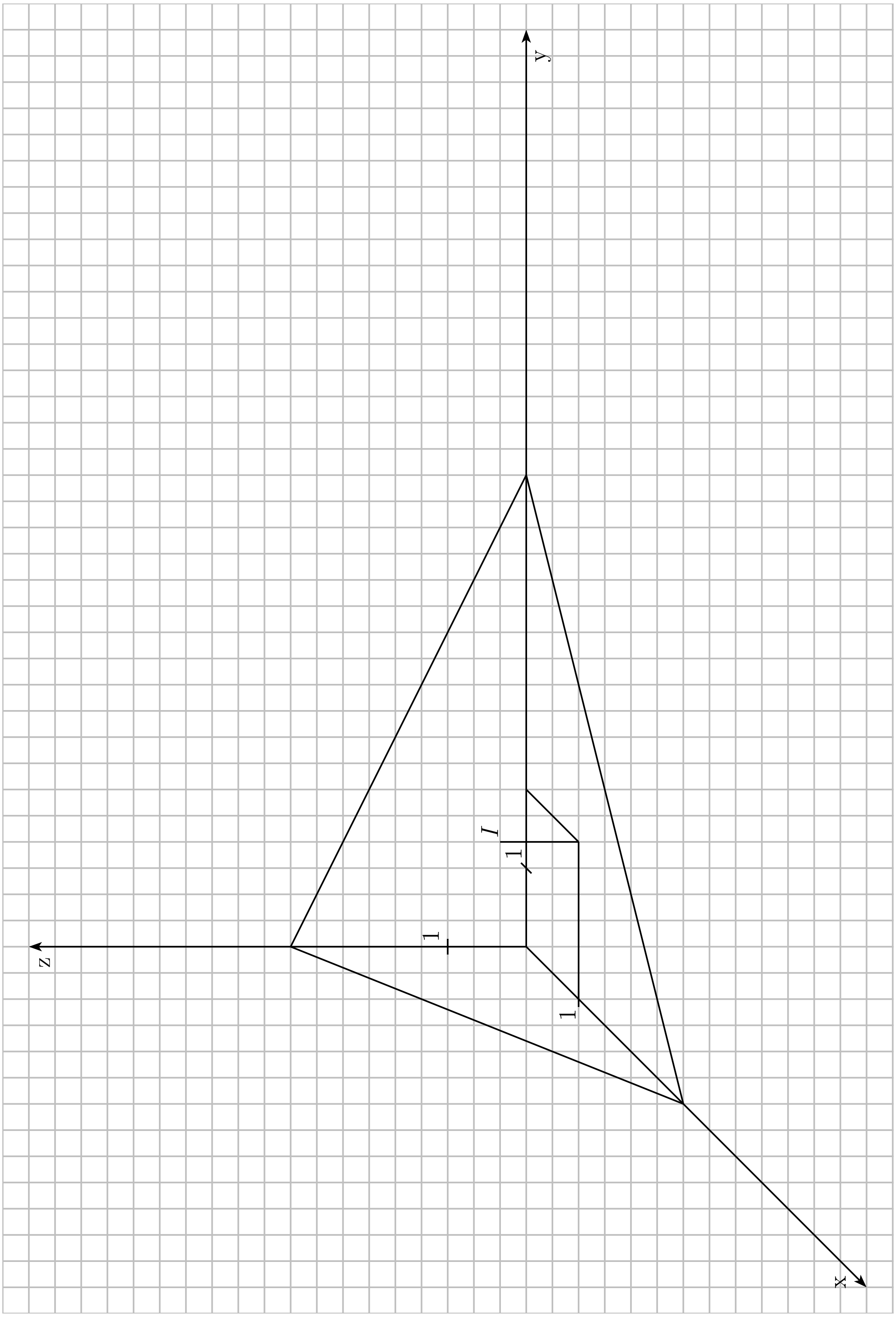
$$1 - (0.4)^{10} \approx 0.99989$$

b)

$$C_6^{10}(0.6)^6(0.4)^4 \approx 0.251$$

4.3

$$\frac{C_1^{21}}{C_5^{25}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{21!}{10!10!}}{\frac{25!}{5!10!10!}} = \frac{1}{2530} \approx 3.95 \cdot 10^{-4}$$



y
z
x
1
1
1
I