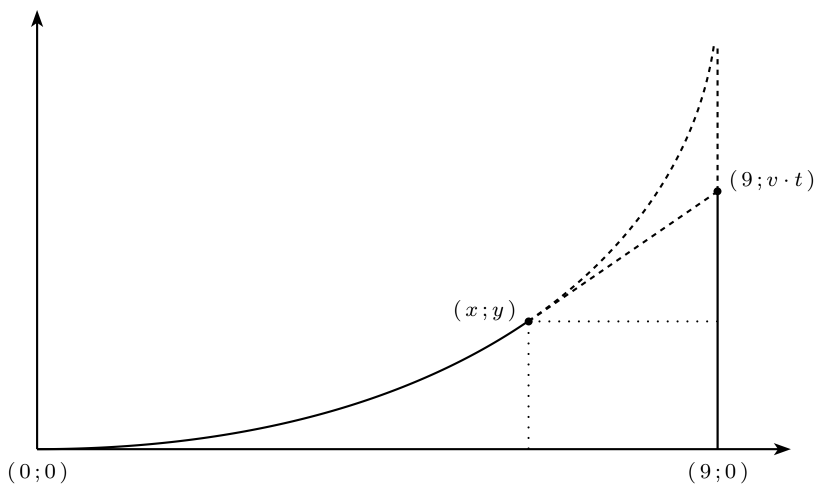
APPLICATION DES MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve :	180 minutes	
Ouvrage et matériel autorisés :	• PC avec Mathematica • formulaire	• calculatrice • documents de cours
Barème :	50 points correspondent à la note 6	

Problème 1 (14 points)

La figure ci-dessous illustre la poursuite d'un bateau marchand par un bateau pirate. Le bateau marchand se trouve au point de coordonnées $(9;0)$ au temps $t = 0$, et se déplace à vitesse constante v le long de la droite $x = 9$. Le bateau pirate se trouve en $(0;0)$ au temps $t = 0$ et et sa vitesse est d'intensité constante $2\,v$. Sa trajectoire est telle qu'il pointe à chaque instant vers le bateau marchand.



1.1 En comparant les distances parcourues par les deux bateaux, justifier l'équation

$$\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz = 2\,v\cdot t$$

où z est une variable muette d'intégration.

1.2 Montrer que la fonction $y(x)$, dont la courbe est la trajectoire du bateau pirate, est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(9-x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Indication : Touver une expression pour y' à l'aide de la figure et utiliser l'équation donnée au point 1.1.

1.3 Sans l'aide de la fonction `DSolve` de Mathematica, résoudre le problème de Cauchy du point 1.2 et calculer l'ordonnée du point où la trajectoire du bateau pirate interceptera celle du bateau marchand.

Problème 2 (13 points)

La méthode de Newton permet d'estimer une racine r (éventuellement complexe) d'une fonction à partir d'une valeur initiale (éventuellement complexe). L'ensemble des valeurs initiales pour lesquelles la méthode converge vers une racine r est appelé le bassin d'attraction de r et est noté $B(r)$. On considère les fonctions f et g données par

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^3 - 1 \end{array}$$

2.1 A l'aide d'un croquis illustrant la méthode de Newton dans $\mathbb{R}$, déterminer les bassins d'attraction réels $B(1)$ et $B(-1)$ des racines de la fonction f.

2.2 A la main, déterminer les valeurs exactes des racines r_1, r_2 et r_3 de la fonction g.

2.3 Utiliser la méthode de Newton pour déterminer des approximations des racines de g à partir des valeurs initiales $1 + i$, $-4 + i$ et $-1 - 3i$. Pour chacune des valeurs initiales, calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-5} sur la partie réelle et sur la partie imaginaire de la racine.

2.4 La fractale de Newton de g est obtenue en coloriant chaque point du plan complexe suivant le bassin d'attraction auquel il appartient. Représenter la fractale de Newton de g pour des valeurs initiales dont les parties réelles et imaginaires sont comprises entre -1 et 1.

Indication : utiliser la fonction Mathematica `ListDensityPlot` avec avec les options

$$\texttt{ColorFunction} \to \texttt{Hue}, \texttt{ColorFunctionScaling} \to \texttt{False}, \texttt{Mesh} \to \texttt{False}$$

et un tableau qui contient, pour une valeur initiale $z \in B(r_k)$, le rapport

$$\frac{\mathrm{Arg}(r_k)}{2\pi}$$

Problème 3 (14 points)

Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère les points A, B, C, D et E de coordonnées

$$A(2 ; 3), B(2 ; 6), C(3 ; 7), D(4 ; 4) \text{ et } E(3 ; 3)$$

et l'ellipse $\mathcal{E}$ qui passe par ces points. On considère également le rectangle $\mathcal{R}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- les supports des côtés de $\mathcal{R}$ sont tangents à l'ellipse,
- un des côtés de $\mathcal{R}$ est parallèle à l'axe focal de $\mathcal{E}$.

3.1 Déterminer l'équation de $\mathcal{E}$ dans le repère $(O ; I ; J)$.

3.2 Déterminer l'aire de $\mathcal{R}$.

3.3 Représenter graphiquement $\mathcal{E}$ et les supports des côtés de $\mathcal{R}$ dans le repère $(O ; I ; J)$.

Problème 4 **(13 points)**

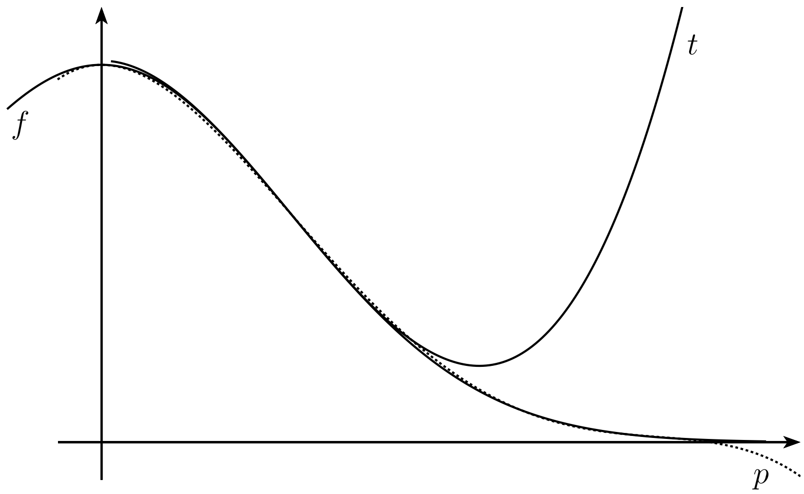
La densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sa fonction de répartition, notée Φ, est la fonction

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

qui n'admet pas de forme analytique. Comme illustré sur la figure ci-dessous, on va approximer f par un polynôme de Taylor t et par un polynôme d'interpolation p.



4.1 Déterminer $t(x)$ sachant que c'est le polynôme de Taylor de f de degré 3 en $x = 1$.

4.2 L'intervalle I est défini comme l'intervalle centré en 1 à l'intérieur duquel l'écart absolu entre f et t ne dépasse pas 0.01. Calculer la longueur de l'intervalle I.

4.3 Déterminer p sachant que c'est le polynôme de degré 4 qui satisfait aux conditions suivantes :
- p admet, comme f, un maximum local en $(\,0\,;f(0)\,)$,
- p admet, comme f, un point d'inflexion en $(\,1\,;f(1)\,)$,
- p passe par le point $(\,3\,;f(3)\,)$.

4.4 Pour $x \in [\,0\,;3\,]$, on décide de remplacer Φ par un polynôme q de la forme

$$q(x) = \int_{0}^{x} p(t)dt + c \qquad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

Répondre aux questions suivantes (**Attention**, il n'est **pas nécessaire** de connaître explicitement $p(x)$) :
- Quelle valeur est-il judicieux de donner à la constante c ? Justifier la réponse.
- Si on pose $c = 0.5$, quelle sera l'abscisse $x \in [\,0\,;3\,]$ pour laquelle l'erreur absolue commise en remplaçant Φ par q sera maximale ?