CEJEF
DIVISION LYCÉENNE

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2012 OS Biologie – Chimie

MATHEMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Fascicule « Extraits des formulaires et tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

1. Etude de fonction

1.1. Etudier la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \cdot e^{-x} \quad .$$

Au cours de l'étude, on montrera que la dérivée première est la suivante :

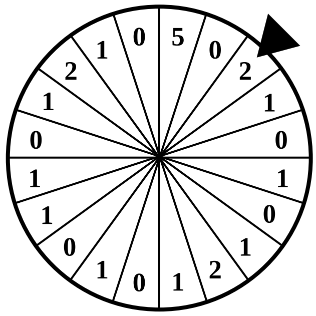
$$f'(x) = \frac{(-x^2 + x - 1) \cdot e^{-x}}{(x-1)^2} \quad .$$

1.2. Calculer la pente de la tangente au point d'inflexion.

1.3. Utiliser les résultats précédents pour représenter le graphe de cette fonction (unité : 2 cm).

2. Probabilités

Une des attractions d'une fête foraine consiste à faire tourner une roue, telle que celle représentée ci-contre, divisée en vingt secteurs identiques.
Lorsque la roue s'arrête, une flèche fixe désigne l'un des vingt secteurs.



2.1. On fait tourner une fois la roue.
Quelle est la probabilité que la roue s'arrête sur un « 2 » ?
Quel est le nombre moyen de points ?

En achetant un jeton, on peut effectuer une partie qui consiste à lancer trois fois la roue (lancers indépendants !). Le joueur gagne l'équivalent en francs de la somme des trois nombres que la flèche aura indiqués.

2.2. Un joueur effectue une partie.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : ne rien gagner.
B : gagner exactement CHF 8.-.
C : gagner exactement CHF 2.-.
D : gagner exactement CHF 4.- sachant que la roue s'est arrêtée au moins une fois sur un « 1 ».

2.3. Un joueur décide de faire vingt parties.
Calculer la probabilité qu'il remporte exactement 4 fois CHF 2.-.
Calculer la probabilité qu'il gagne exactement deux fois CHF 8.- et exactement cinq fois CHF 2.-.

2.4. Un joueur déclare avoir réalisé « une bonne partie » s'il gagne au moins CHF 10.-.
Montrer que la probabilité de réussir « une bonne partie » est de 0,00725.
Calculer le nombre de parties que le joueur devra faire pour être sûr à 99% d'avoir réalisé au moins une « bonne partie ».

2.5. Un joueur joue 100 parties. Estimer la probabilité que ce joueur a de gagner entre 20 et 30 fois (bornes comprises) CHF 2.-.

suite au verso

3. Géométrie vectorielle

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les trois points $A(-10; 32; -2), B(6; -16; 10)$ et $C(-2; 34; 4)$.

3.1. Montrer que le triangle *ABC* est rectangle en *C*.
3.2. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points *A*, *B* et *C*.
3.3. Calculer 1'aire du triangle *ABC*.
3.4. Calculer l'angle β du triangle *ABC*.

On donne encore la droite d: $\begin{cases} x = -4 + 4k \\ y = 1 - 2k \\ z = -10 + 3k \end{cases}$ et le point $D(2; 3; -1)$.

3.5. Montrer que le plan π et la droite *d* sont strictement parallèles.
3.6. Calculer la distance séparant la droite *d* et le plan π.
3.7. Déterminer l'équation cartésienne d'une sphère tangente au plan π, passant par le point *D* et dont le centre appartient à la droite *d*.

4. Algèbre linéaire, analyse

4.1. Soit un endomorphisme donné par sa matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

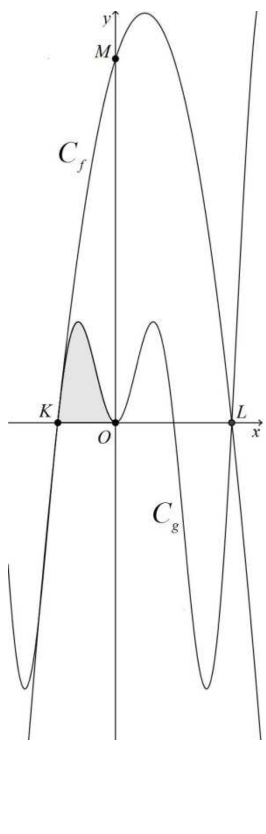
a) Calculer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de la matrice *B*.
b) Donner l'interprétation géométrique de cet endomorphisme.
c) Une matrice carrée inversible *A* est dite orthogonale lorsque sa transposée est égale à son inverse (${}^tA = A^{-1}$). La matrice *B* est-elle orthogonale ?
d) Pour quelles valeurs de *a* et *b* la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

4.2. Soit l'équation différentielle suivante : $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$.

a) Déterminer la solution générale de cette équation.
b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celle dont le graphe contient le point $(2; -1)$.

5. Analyse

Soient les fonctions *f* et g données par $f(x) = -x^2 + \pi x + 2\pi^2$ et $g(x) = 3x \cdot \sin(x)$ dont les représentations graphiques C_f et C_g, relativement à un repère orthonormé, se trouvent ci-contre.



5.1. a) Donner les coordonnées des points d'intersection *K*, *L et M* de C_f avec les axes.
b) Vérifier que la pente de la tangente à C_f en *K* vaut 3π.
c) Montrer que C_f et C_g sont tangentes en *K*.

5.2. a) Quelle est la pente de la droite (ML) ?
b) Calculer la valeur de *x* pour laquelle la tangente à C_f au point d'abscisse *x* est parallèle à la droite (ML).

5.3. Calculer l'aire du domaine grisé.

5.4. On appelle *P* un point quelconque de C_f situé dans le premier quadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$.
On appelle *I* sa projection orthogonale sur l'axe *Ox* et *J* sa projection orthogonale sur l'axe *Oy*
Quelles sont les coordonnées du point *P* pour lesquelles l'aire du rectangle *PJOI* est maximale ?