MATHÉMATIQUES RENFORCÉES

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 **(12 points)**

Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$$

1.1 Etudier cette fonction f, y compris sa dérivée seconde, et représenter son graphe dans un repère orthonormé (unité : 4 carrés).

1.2 Déterminer l'abscisse a **positive** du point du graphe de f où la pente de la normale (perpendiculaire à la tangente) est égale à $\frac{3}{2}$.

1.3 Montrer que cette normale n'a pas d'autre point d'intersection avec le graphe de f.

Problème 2 **(7 points)**

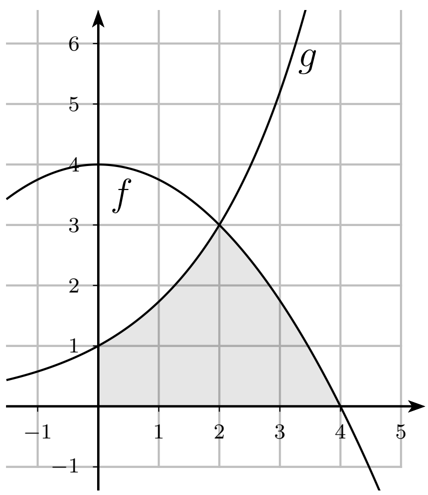
Dans le premier quadrant, le graphe de la fonction f donnée par

$$f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$$

détermine un domaine fermé avec les axes du repère. Ce domaine est partagé en deux parties par le graphe de la fonction g donnée par

$$g(x) = 3^{\frac{x}{2}}$$

Calculer le volume obtenu par la rotation du domaine grisé sur la figure ci-contre autour de Oy.



Problème 3 **(11 points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A et B de coordonnées

$$A(-7\,;19\,;-2\,) \qquad \text{et} \qquad B(\,13\,;4\,;-2\,)$$

et la sphère Σ d'équation

$$\Sigma \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 22 = 0$$

3.1 Déterminer les coordonnées du centre C de Σ et son rayon r.

3.2 Donner les équations paramétriques de la droite $(AB\,)$.

3.3 Calculer la distance minimale entre la sphère Σ et la droite $(AB\,)$.

3.4 Déterminer les équations des plans tangents à Σ qui contiennent la droite $(AB\,)$.

Problème 4 **(10 points)**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, on considère les vecteurs v_1, v_2 et v_3 donnés par

$$v_1 = (\,2\,;1\,;0\,)\,, \quad v_2 = (\,0\,;1\,;-1\,) \quad \text{et} \quad v_3 = (\,3\,;0\,;2\,)$$

et l'endomorphisme f dont on sait que

$$f(v_1) = v_1\,, \quad f(v_2) = 0 \quad \text{et} \quad f(v_3) = v_3$$

4.1 Montrer que $\mathcal{B} = (\,v_1\,;v_2\,;v_3\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

4.3 Donner les valeurs propres de f et leurs sous-espaces propres associés, ainsi qu'une interprétation géométrique de f.

4.4 Calculer la matrice M de f relativement à la base canonique.

4.5 Déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 5 **(13 points)**

Un professeur de tennis dispose d'un chariot dans le lequel il y a une grande quantité de balles. La moitié de ces balles sont de la marque A, 30 % sont de la marque B et le reste est de la marque C.

Lors d'une phase d'entraînement, le professeur de tennis extrait au hasard 6 balles du chariot. Vu la grande quantité de balles qui s'y trouvent, on considère cette action comme un tirage avec remise. Calculer :

5.1 La probabilité que toutes les balles extraites soient de la marque A.

5.2 La probabilité qu'il y ait, dans un ordre quelconque, 3 balles de la marque A, 2 balles de la marque B et 1 balle de la marque C.

5.3 La probabilité qu'il y ait au moins 4 balles de la marque A.

5.4 La probabilité qu'il y ait au moins deux marques différentes.

5.5 La probabilité qu'il y ait 2 balles de chaque marque sachant qu'il y a au moins deux marques différentes.

Le champion que le professeur entraîne affirme qu'il y a une différence de qualité entre les trois marques. Il préfère les balles de la marque B. Lors de l'entraînement de ce matin, le professeur lui a lancé 500 balles, toutes extraites au hasard du chariot qui avait été régulièrement rempli de balles récoltées par un jeune joueur tout fier de voir son champion à l'entraînement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de balles de la marque B qui figurent dans les 500 balles lancées.

5.6 Calculer la probabilité que X soit supérieure à 150.

5.7 Déterminer l'intervalle centré sur la moyenne tel que la probabilité que X appartienne à cet intervalle soit au moins de 0,90.