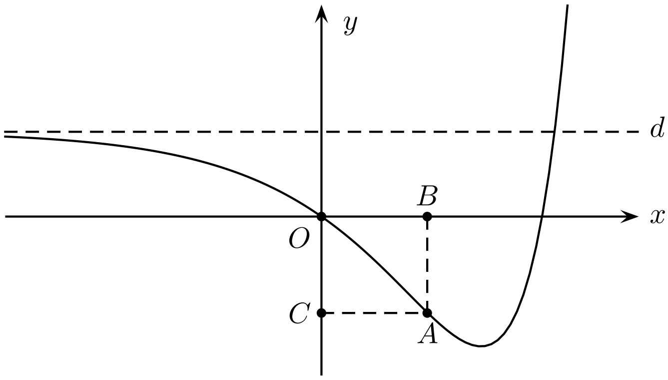
Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 2)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (e^x - 1)(e^x - 8) = e^{2x} - 9e^x + 8.$$

Le graphe de f a la forme suivante (le dessin n'est pas à l'échelle) :



a) Calculer les zéros de f.

b) La droite d est l'asymptote horizontale du graphe de f. Trouver son équation.

c) Calculer les coordonnées du point à tangente horizontale.

d) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f à l'origine.

e) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de f et l'axe des x.

f) Sur le graphe, on considère un point $A(x; f(x))$ dans le quatrième quadrant et on note B et C ses projections sur les axes de coordonnées. Trouver la valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle $OBAC$ est maximal.

Pour un nombre réel m donné, on considère la fonction g définie par

$$g(x) = (e^x - 1)(e^x - m).$$

g) Vérifier que $g'(x) = e^x(2e^x - m - 1)$.

h) Pour quelles valeurs de m la fonction g a-t-elle exactement un point à tangente horizontale ?

Problème 2 (poids 2)

Remarque : *Pour les parties b), c) et d), utiliser le repère donné en annexe. Dessiner les parties invisibles en traitillé, utiliser plusieurs couleurs.*

On considère la droite d qui passe par les points $A(4;10;0)$ et $B(1;1;3)$, ainsi que le plan π d'équation $2x + y + 2z - 12 = 0$.

a) Etablir une représentation paramétrique de la droite d.

b) Dessiner la droite d en mettant en évidence ses traces dans les trois plans de référence. Dessiner également la projection de d dans le sol.

c) Dessiner les traces du plan π.

d) Par dessin, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π.

e) Calculer l'angle aigu entre la droite d et le plan π.

f) On considère la droite d' parallèle à d et passant par $P(3;-1;2)$. Calculer la distance minimale entre les droites d et d'.

On considère finalement la sphère $\sigma : (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 36$.

g) Trouver l'équation cartésienne d'un plan horizontal tangent à la sphère σ.

h) Le plan π coupe la sphère σ selon un cercle $\mathcal{C}$. Déterminer le centre et le rayon de ce cercle d'intersection.

i) Montrer que le point $T(5;4;-1)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ et trouver un vecteur directeur de la droite incluse dans π et tangente à la sphère σ en T.

Problème 3 (poids 1)

Dans une classe d'un lycée, il y a 12 filles et 8 garçons. Chaque lundi durant lequel il y a des cours, Monsieur Wort, professeur d'allemand, interroge un élève choisi au hasard pour vérifier s'il a bien appris ses mots de vocabulaire. Afin que les élèves déjà interrogés continuent d'apprendre leur vocabulaire, Monsieur Wort n'élimine pas les élèves déjà interrogés, ce qui signifie qu'un élève peut être interrogé plusieurs fois au cours de l'année. Afin de simplifier les calculs, on supposera qu'il n'y a pas d'absentéisme dans cette classe. De plus, au lieu de dire "un lundi durant lequel il y a des cours", on dira simplement "un lundi".

a) Quelle est la probabilité que lors de trois lundis consécutifs, Monsieur Wort n'interroge que des filles ?

b) Quelle est la probabilité qu'en six lundis, Monsieur Wort interroge autant de filles que de garçons ?

c) Quelle est la probabilité qu'en six lundis, Monsieur Wort interroge six élèves différents ?

d) Après combien de lundis au minimum la probabilité que Gaston se soit fait interroger au moins une fois dépassera-t-elle 80% ?

e) Gaston décide d'apprendre son vocabulaire jusqu'à ce qu'il se fasse interroger, puis de ne plus l'apprendre jusqu'à la fin de l'année scolaire. Calculer la probabilité qu'au cours de l'année scolaire il apprenne son vocabulaire...
   1) exactement dix fois,
   2) plus de dix fois,
   3) moins de dix fois.

Le dernier jour de l'année scolaire, qui est un mercredi, Monsieur Wort décide d'interroger deux élèves choisis au hasard (évidemment pas deux fois le même).

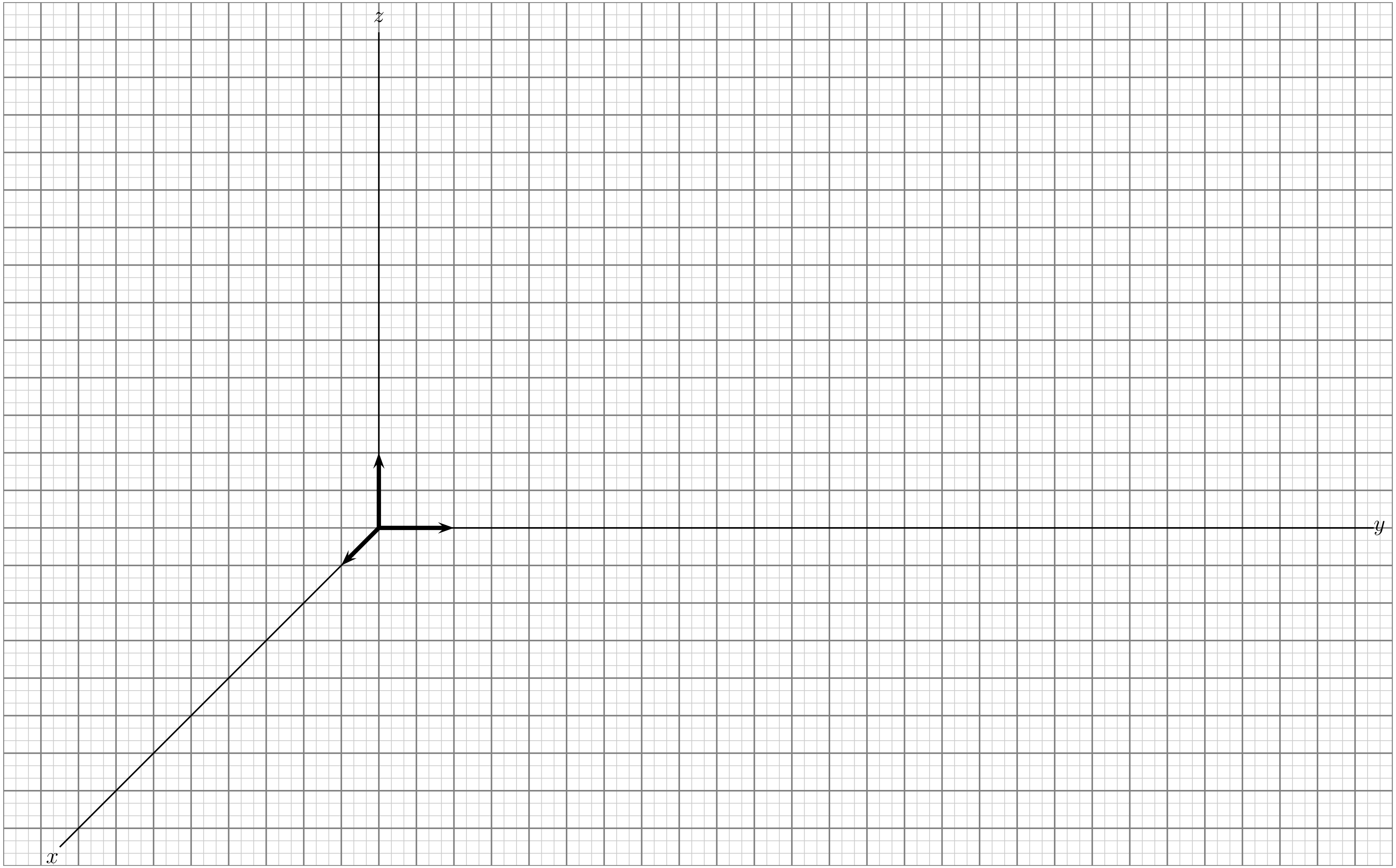
f) Quelle est la probabilité que Jeanne se fasse interroger ce jour-là ?

g) Quelle est la probabilité que Monsieur Wort interroge deux élèves de sexe opposé ?

h) Sachant qu'il a interrogé deux élèves du même sexe, calculer la probabilité qu'il ait interrogé deux filles.

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : .... Classe : ....



Problème 1

a) $f(x) = 0 \iff e^x \in \{1; 8\} \iff x \in \{0, \ln(8)\}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-1)\cdot(-8) = 8$ donc A.H. $y = 8$ lorsque $x \to -\infty$.

c) $f'(x) = e^x(e^x - 8) + (e^x - 1)e^x = e^x(2e^x - 9)$ s'annule lorsque $2e^x = 9$, donc $x = \ln(9/2)$. On a $f(\ln(9/2)) = -12.25$, et le minimum est $M(\ln(4.5); -12.25)$

d) pente $= f'(0) = -7$, donc l'équation est $y = -7x$.

e) primitive $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 9e^x + 8x$,
Aire $= \left| [F(x)]_0^{\ln(8)} \right| = |(-40 + 8\ln(8)) - (-8.5)| = 31.5 - 8\ln(8) \cong 14.8645$

f) périmètre $p(x) = 2(x - f(x))$ maximal lorsque $f'(x) = e^x(2e^x - 9)$ vaut 1, c-à-d. $2e^{2x} - 9e^x - 1 = 0$, $e^x = \dfrac{9 \pm \sqrt{89}}{4}$. Le cas "$-$"est exclu, donc $x = \ln\left(\frac{9+\sqrt{89}}{4}\right) \cong 1.528$

g)h) $g'(x) = e^x(2e^x - m - 1)$ s'annule pour une seule valeur de x lorsque l'équation $e^x = \dfrac{m+1}{2}$ est résoluble, c'est-à-dire si $m > -1$.

Problème 2 : voir page suivante

Problème 3

a) $\mathbb{P}(FFF) = (0.6)^3 = 0.216$

b) $\mathbb{P}(\langle FFFGGG\rangle) = \binom{6}{3}(0.6)^3(0.4)^3 = 20\cdot(0.24)^3 = 0.27648$

c) $\dfrac{20}{20}\cdot\dfrac{19}{20}\cdot\dfrac{18}{20}\cdot\dfrac{17}{20}\cdot\dfrac{16}{20}\cdot\dfrac{15}{20} = 0.43605$

d) $1 - (0.95)^n > 0.8$, $\quad (0.95)^n < 0.2$, $\quad n\ln(0.95) < \ln(0.2)$, $\quad n > \dfrac{\ln(0.2)}{\ln(0.95)} \cong 31.38$
donc $n = 32$

e) 1) $(0.95)^9(0.05) \cong 0.03151$
2) $(0.95)^{10} \cong 0.59874$
3) $1 - \mathbb{P}(\text{plus de 9 fois}) = 1 - (0.95)^9 \cong 0.36975$

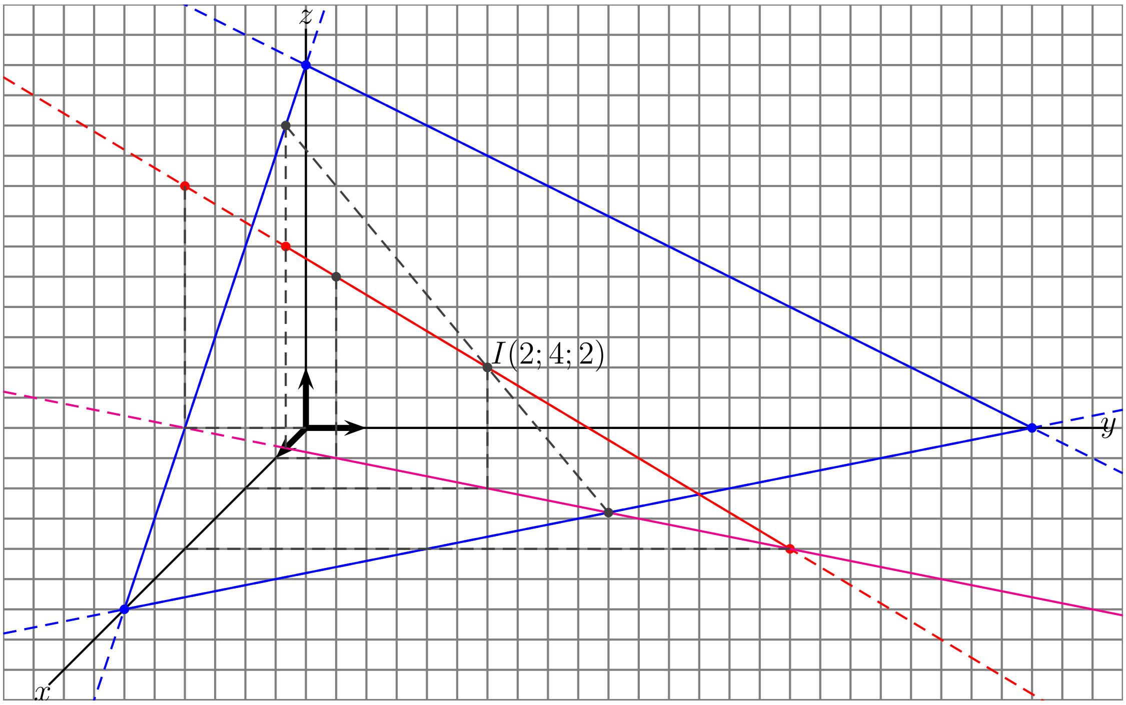
f) $\dfrac{2}{20} = 0.1$

g) $\mathbb{P}(FG, GF) = \dfrac{12}{20}\cdot\dfrac{8}{19} + \dfrac{8}{20}\cdot\dfrac{12}{19} = 2\cdot\dfrac{12\cdot 8}{20\cdot 19} = \dfrac{48}{95} \cong 0.50526$

h) $\mathbb{P}(FF|\{FF, GG\}) = \dfrac{\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}}{1 - \frac{48}{95}} = \dfrac{33/95}{47/95} = \dfrac{33}{47} \cong 0.70213$

Problème 2

a) $d : \{x = 4 - \lambda,\ y = 10 - 3\lambda,\ z = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$



e) $\sphericalangle_a(d, \pi) = 90° - \sphericalangle_a\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right) = 90° - \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{11}\cdot 3}\right) \cong 17.548°$

f) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\-9\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}-1\\-11\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}15\\3\\24\end{pmatrix}$. On en déduit

$$\text{dist}(d', d) = \text{dist}(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{810}}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}} \cong 2.86$$

g) centre $C(5; 4; 5)$ et rayon $R = 6$, plans tangents horizontaux $z = -1$ et $z = 11$

h) Le centre du cercle est $C'(5 + 2\lambda; 4 + \lambda; 5 + 2\lambda) \in \pi$: on trouve $12 + 9\lambda = 0$, donc $\lambda = -\frac{4}{3}$ et $C'\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$. On a $\text{dist}(C, \pi) = \dfrac{12}{3} = 4$ donc le rayon du cercle d'intersection est $r = \sqrt{R^2 - 4^2} = \sqrt{20}$.

i) Le point T est à la fois dans le plan π et sur la sphère σ.
$\vec{d} = \overrightarrow{n_\pi} \wedge \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\0\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Annexe pour le problème 2 Nom et prénom : .... Classe : ....