MATHÉMATIQUES STANDARD

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (18 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (2x - 1) \cdot e^{x-1} + 4$$

1.1 Etudier cette fonction en tenant compte des remarques suivantes :
- la recherche des **zéros** de f et l'étude de son signe **ne sont pas demandées**,
- l'étude de la **deuxième dérivée** de f **est demandée**,
- la courbe de f doit être représentée dans un repère orthonormé dont l'**unité** correspond à **trois carrés**.

1.2 On considère la droite t, tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

a) Déterminer l'équation de t.

b) Déterminer une primitive de f en utilisant l'intégration par parties.

c) Calculer l'aire de la région du plan délimitée par la courbe de f, la tangente t et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 2 (14 points)

Dans un repère orthonormé, on définit les éléments suivants :
- les points $A(\,2\,;12\,;0\,)$, $B(\,2\,;6\,;0\,)$, $C(\,8\,;6\,;0\,)$, $D(\,8\,;12\,;0\,)$ et $E(\,2\,;12\,;6\,)$,
- le cube K possédant la face carrée $ABCD$ et le sommet E,
- la droite d passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.1 Représenter graphiquement le cube K et la droite d dans le repère orthonormé **donné sur la feuille annexe**.

2.2 Déterminer l'équation cartésienne du plan (CDE).

2.3 Calculer l'angle aigu entre les droites d et (BD).

2.4 La droite d coupe le cube K au sommet D, mais également en un autre point P situé sur une de ses faces. Quelles sont les coordonnées du point P ?

2.5 Déterminer l'équation de la sphère Σ circonscrite au cube K (chaque sommet de K se situe ainsi sur Σ).

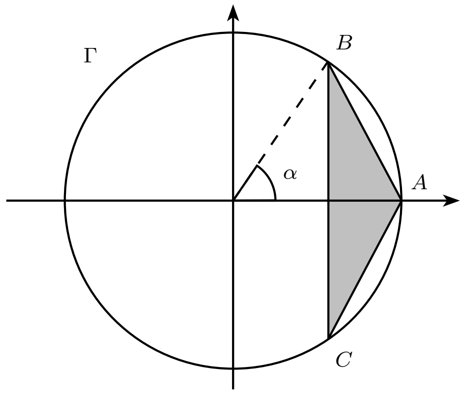
2.6 Calculer la distance (minimale) entre la sphère Σ et le plan de base (Oxz).

2.7 Déterminer les coordonnées du point Q de la droite d qui est le plus proche du sommet E.

Problème 3 **(7 points)**

Dans un repère orthonormé, on considère un cercle Γ et un triangle ABC dont on sait que :

- le cercle Γ est centré à l'origine et passe par $A(1\,;0)$,
- les points B et C sont deux points de Γ de même abscisse,
- les coordonnées de B dépendent de l'angle $\alpha \in \,]\,0\,;\pi\,[$ représenté sur la figure ci-contre.



3.1 Montrer que l'aire S du triangle ABC peut être exprimée en fonction de l'angle $\alpha \in \,]\,0\,;\pi\,[$ par la relation

$$S(\alpha) = \sin(\alpha) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

3.2 Calculer la valeur de $\alpha \in \,]\,0\,;\pi\,[$ pour laquelle l'aire S est maximale.

Problème 4 **(14 points)**

Une urne contient quatre boules noires, chacune portant le numéro 0, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et trois boules jaunes également numérotées de 1 à 3. La valeur d'un tirage est la somme des numéros des boules tirées.

4.1 **On tire simultanément trois boules de cette urne au hasard.**

a) Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait une boule noire et que la valeur du tirage soit égale à 5 ?

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une boule noire et que la valeur du tirage soit égale à 5, sachant qu'une boule de chaque couleur a été tirée.

4.2 **On tire, successivement et sans remise, deux boules de cette urne au hasard.**

a) Quelle est la probabilité qu'il y ait le même numéro sur les deux boules tirées ?

b) Quelle est la probabilité que le numéro de la première boule tirée soit supérieur à celui de la deuxième ?

4.3 **On tire, avec remise, dix boules de cette urne au hasard.**
Quelle est la probabilité de tirer plus de deux fois une boule noire ?