Exercice 1 (poids 3)

On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = 3\sqrt{4-x^2}$ et $h(x) = 3\sqrt{-4+x^2}$, ainsi que la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [-2;2], \\ h(x) & \text{si } x \in]-\infty;-2[\cup]2;\infty[. \end{cases}$$

a) · Etudier la fonction g sans la deuxième dérivée.
   · Donner l'ensemble de définition, les zéros et les asymptotes obliques de h.
   · Tracer le graphe de f.

b) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de g et l'axe Ox en sachant que

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

est une primitive de $\sqrt{a^2-x^2}$.

c) On cherche à approcher le graphe de g par une parabole. Trouver l'équation de celle qui passe par les points $I(-2;0)$ et $J(2;0)$ et qui délimite avec l'axe Ox une surface d'aire égale à celle trouvée à la partie b).

d) Pour $k \geqslant 2$, on considère le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox la surface délimitée par le graphe de h, la droite d'équation $y = 3x$ et les droites verticales $x = k$ et $x = k+1$. Calculer ce volume.

Exercice 2 (poids 3)

Dans l'espace V_3 muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$, on considère l'application linéaire f qui décrit la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$.

a) Donner trois vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ qui forment une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale, et donner cette matrice diagonale.

Pour k réel, on considère l'application linéaire m_k définie dans la base $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$ par la matrice

$$M_k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

b) Pour quelle(s) valeur(s) de k la matrice M_k n'est-elle pas inversible ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de k l'image du vecteur $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$ par l'application linéaire m_k est-elle le vecteur nul ?

d) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de m_k pour toute valeur de k, et préciser les valeurs propres correspondantes.

On pose $k = 2$, donc $M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Montrer que M_2 est la matrice de l'application linéaire f dans la base $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$.

On pose $k = 5$, donc $M_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

f) Donner les valeurs propres de m_5 ainsi que les espaces propres correspondants, puis décrire la transformation définie par m_5.

g) Dans l'espace muni du repère métrique $(O; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$, on considère l'affinité de matrice $M = M_5 \cdot M_2$ qui laisse fixe l'origine. Sans calculs, décrire géométriquement l'image de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ par cette affinité.

Exercice 3 (poids 2)

On considère la fonction complexe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = (1+2i)z + (1-2i)\overline{z} - 6.$$

a) Calculer $f(3)$, $f(2+i)$, puis $f(x+iy)$.

b) Calculer le point fixe de f.

c) Déterminer les zéros de f.

d) Montrer que $f(z)$ est la partie réelle de $(2+4i)z-6$. En déduire une interprétation géométrique de f.

Pour la suite de l'exercice, on considère $g(z) = \dfrac{3z - 5\overline{z}}{f(z)}$. En notant $z = x + yi$ et $g(z) = u + vi$, on obtient

$$u = \frac{-x}{x-2y-3} \quad \text{et} \quad v = \frac{4y}{x-2y-3}.$$

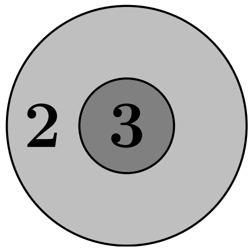
e) Décrire géométriquement l'image par g de l'axe réel privé du point $(3\,;0)$.

f) Déterminer l'équation de la courbe dont l'image par g est la courbe d'équation $uv = 1$. S'agit-il d'un cercle ? Justifier.

Exercice 4 (poids 2)

Lucky Luke pratique le tir à l'arc. Lors de chaque tir, il a

- une probabilité de $\frac{1}{5}$ d'atteindre le centre de la cible ; il obtient alors 3 points,
- une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'arriver dans la zone extérieure de la cible ; il obtient alors 2 points.



Lorsqu'il tire plusieurs flèches, son score est la somme des points obtenus.

a) Lors d'un tir, quelle est la probabilité que Lucky Luke rate la cible ?

b) Quelle est la probabilité que sur six flèches tirées, au moins cinq d'entre elles atteignent la cible ?

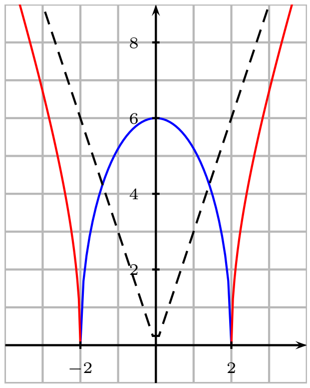
c) Sachant que Lucky Luke a tiré deux flèches sans rater la cible, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un score de 6 points ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir un score d'exactement 8 points en tirant quatre flèches ?

e) Lucky Luke tire des flèches jusqu'à ce qu'il atteigne le centre de la cible. Quelle est la probabilité qu'il doive tirer un nombre impair de flèches ?

f) On propose le jeu suivant à Lucky Luke : il mise m francs et tire deux flèches. Il reçoit un franc par point obtenu. Combien doit valoir m pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 1



a) Etude de g :

$D_g = [-2; 2]$, $I_y(0; 6)$, $I_{x1}(-2; 0)$, $I_{x2}(2; 0)$

Fonction paire, positive sur son domaine de définition et dont le graphe ne présente aucune asymptote.

$$g'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2		0		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

max en $H(0; 6)$

Points à tangente verticale : $V_1(-2; 0)$ et $V_2(2; 0)$.

Fonction h : définie sur $D_h = [-\infty; -2] \cup [2; \infty[$, admet les zéros $x = \pm 2$ et une asymptote "en $\vee$" d'équation $y = 3|x|$ (asymptotes $y = -3x$ pour $x \to -\infty$ et $y = 3x$ pour $x \to \infty$) car $h(x) = 3\sqrt{x^2-4} \approx 3\sqrt{x^2} = 3|x|$.

b) $G(x) = \dfrac{3x}{2}\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\quad$ Aire $= 2\,[G(x)]_0^2 = 2\left(6 \cdot \frac{\pi}{2} - 0\right) = 6\pi$

c) parabole d'équation $y = a(x-2)(x+2) = a(x^2-4)$ telle que $\left|\int_{-2}^{2} a(x^2-4)dx\right| = 6\pi$,

$$a\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \pm 6\pi, \quad 2a\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{0}^{2} = \pm 6\pi, \quad a\frac{-16}{3} = \pm 3\pi, \quad a = \pm\frac{9\pi}{16}$$

La parabole approchant au mieux le graphe de g, on doit considérer $a = -9\pi/16$.

d) $$V(k) = \pi\int_k^{k+1} 9x^2dx - \pi\int_k^{k+1} 9(x^2-4)dx = \pi\int_k^{k+1} 36dx = 36\pi$$

Exercice 2

a) $\overrightarrow{w_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} /\!/ \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$, $\quad \overrightarrow{w_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} /\!/ \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

$F' = \text{Diag}(0, 1, 1)$

b) $\det(M_k) = \cdots = \frac{1}{27}(k^3 - 3k - 2) = \frac{1}{27}(k+1)^2(k-2)$ est nul lorsque $k \in \{-1, 2\}$.

c) $M_k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}k-2\\k-2\\-(k-2)\end{pmatrix}$ est nul lorsque $k = 2$

d) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont $\left(\frac{k+1}{3}\right)$-propres, alors que $\overrightarrow{c}$ est $\left(\frac{k-2}{3}\right)$-propre.

e) f et m_2 admettent les mêmes valeurs et vecteurs propres.
Autre argument : $F = I - P$ où P est la matrice de projection orthogonale sur $\overrightarrow{c} /\!/ \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \ldots$

f) M_5 admet les valeurs propres $\lambda = 2$ (plan propre $x + y - z = 0$) et $\lambda = 1$ (vecteurs propres proportionnels à $\overrightarrow{c}$). M_5 décrit donc une affinité orthogonale de rapport 2 par rapport au vecteur $\overrightarrow{c}$

g) La sphère est envoyée par M_2 sur sa projection dans le plan $x + y - z = 0$, qui est un disque centré en l'origine et de rayon 1. Son image par M_5 est le disque centré en l'origine, de rayon 2, contenu dans le plan $x + y - z = 0$. Remarque : $M_5M_2 = 2M_2$

Exercice 3

a) $f(3) = 0,\ \ f(2 + i) = -6,\ \ f(x + yi) = 2x - 4y - 6$

b) $f(z) = z \iff z \in \mathbb{R}$ et $2x - 4y - 6 = x \iff y = 0$ et $2x - 6 = x \iff y = 0$ et $x = 6$
L'application f admet donc le point fixe $z = 6$.

c) $f(z) = 0 \iff 2x - 4y - 6 = 0 \iff x - 2y - 3 = 0$ les zéros de f forment une droite

d) $(2+4i)z-6 = (2+4i)(x+yi)-6 = 2x+2yi+4ix-4y-6 = (2x-4y-6)+(2y+4x)i$
donc $f(z) = \mathrm{Re}((2 + 4i)z - 6)$.

$$f = \mathrm{Proj}(y = 0) \circ \mathrm{Trans}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} \circ \mathrm{Hom}(O : 2\sqrt{5}) \circ \mathrm{Rot}(O : 63^\circ)$$

e) $y = 0 \iff u = \dfrac{-x}{x-3}$ et $v = 0$. Comme u peut prendre n'importe quelle valeur différente de -1, l'image cherchée est l'axe réel privé du point $(-1; 0)$.

f) La condition $uv = 1$ implique $-4xy = (x - 2y - 3)^2 \iff -4xy = x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy - 6x + 12y \iff x^2 + 4y^2 + 9 - 6x + 12y = 0$. Cette équation n'est pas celle d'un cercle car elle ne présente pas le même nombre de x^2 que de y^2.

Exercice 4

a) $\mathbb{P}(0 \text{ point}) = 1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} = 0.3$

b) $\mathbb{P}(5 \text{ ou } 6 \text{ succès}) = \mathbb{P}(5 \text{ succès}) + \mathbb{P}(6 \text{ succès}) = 6 \cdot 0.3 \cdot (0.7)^5 + (0.7)^6 = 0.420175$

c) $\dfrac{\mathbb{P}(6 \text{ points avec deux flèches})}{\mathbb{P}(2 \text{ succès avec deux flèches})} = \dfrac{0.2^2}{0.5^2 + 0.2^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.2} = \dfrac{0.04}{0.49} = \dfrac{4}{49} \cong 0.0816$

d) $\mathbb{P}(2222, \langle 3320 \rangle) = 0.5^4 + 12 \cdot (0.2)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.0625 + 0.072 = 0.1345$

e) $0.2\big((0.8)^2 + (0.8)^4 + (0.8)^6 + \cdots\big) = 0.2\big(0.64 + (0.64)^2 + (0.64)^3 + \cdots\big) = 0.2 \cdot \dfrac{1}{1 - 0.64}$
$= \dfrac{0.2}{0.36} = \dfrac{5}{9} = 0.\overline{5}$

f) Soit X le gain de Lucky Luke.

k	0	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0.09	0.3	0.12	0.25	0.2	0.04

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.12 + 4 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.04 = 3.2$