Exercice 1 (poids 2)

▷ Première partie

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la fonction $f : x \longmapsto y = (ax^2 + 1)e^{-2x}$.

a) Pour quelles valeurs de a le graphe de f coupe-t-il l'axe des x ?

b) Pour quelle valeur de a le graphe de f admet-il un seul point à tangente horizontale ?

Pour la suite du problème, on choisit $a = 4$, donc $f : x \longmapsto y = (4x^2 + 1)e^{-2x}$.

c) Étudier la fonction f, sans la parité. Représenter soigneusement son graphe dans un repère orthonormé en prenant 6 carreaux comme unité.

d) Établir l'équation de la tangente t au graphe de f en son point d'intersection avec l'axe des y. Dessiner cette tangente.

e) Calculer l'angle aigu formé par la tangente t et l'axe des y.

f) Déterminer une primitive F de la fonction f.

▷ Deuxième partie

On considère les fonctions suivantes :

$h_1 : x \longmapsto y = x^3$

$h_2 : x \longmapsto y = \sqrt[3]{x}$

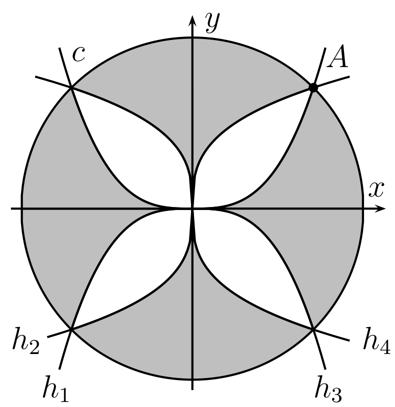
h_3 , dont le graphe est symétrique à celui de h_1 par rapport à l'axe des abscisses

h_4 , dont le graphe est symétrique à celui de h_2 par rapport à l'axe des abscisses.

On considère encore le cercle c centré à l'origine et passant par le point $A(1; 1)$. Une représentation de la situation se trouve sur le dessin ci-dessous.

g) Trouver les expressions fonctionnelles des fonctions h_3 et h_4.

h) Calculer l'aire de la surface fermée ("pétale") formée par les graphes des fonctions h_1 et h_2 dans le premier quadrant, puis en déduire l'aire de la surface grisée.



Exercice 2 (poids 2)

▷ Première partie

On donne les plans $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$ et $\alpha : 3x + 8y - 24 = 0$.

a) Dans le repère donné en annexe, représenter les plans π et α par leurs traces.

b) Dessiner la droite d'intersection i de π et α, ainsi que sa projection orthogonale dans la paroi.

Les parties invisibles sont à dessiner en traitillé. Employer des couleurs.

▷ Deuxième partie

On considère le plan $\pi : x-2y+2z-4 = 0$ et la sphère $\mathcal{S} : (x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 1$.

c) Quel angle aigu le plan π forme-t-il avec la paroi ?

d) Donner une représentation paramétrique de p, droite d'intersection de π et de la paroi.

e) Montrer que la sphère $\mathcal{S}$ est tangente à la fois à π et à la paroi, et trouver les deux points de contact respectifs.

f) Déterminer l'équation du plan π', π' étant strictement parallèle à π et également tangent à $\mathcal{S}$.

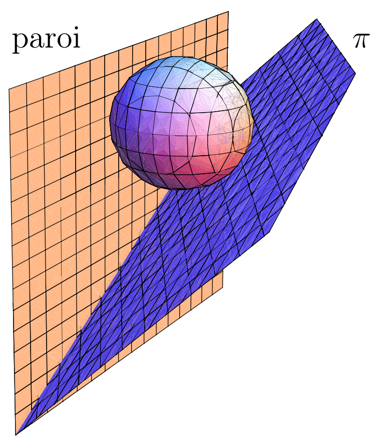
L'image ci-dessous montre la situation de la sphère $\mathcal{S}$, du plan π et de la paroi.

g) La sphère $\mathcal{S}$ se met à rouler (le long de π et de la paroi) et son centre se déplace selon une droite d.

Donner une représentation paramétrique de d.

h) La sphère $\mathcal{S}$ s'arrête lorsqu'elle touche le sol.

Quelles sont alors les coordonnées de son centre ?



Exercice 3 (poids 1)

Lors de son spectacle, un magicien tire des lapins de son chapeau. Il possède cinq lapins, trois sont blancs et identiques et deux sont noirs et identiques.

Au début du spectacle, le lapin tiré du chapeau y retourne immédiatement.

a) Quelle est la probabilité que les deux premiers lapins tirés soient de couleurs différentes ?

b) Quelle est la probabilité que lors des cinq premiers tirages il y ait deux lapins blancs et trois lapins noirs ?

c) Quelle est la probabilité que lors des cinq premiers tirages il y ait deux lapins blancs et trois lapins noirs et que les noirs ait été tirés successivement ?

d) Quel est le nombre minimal de tirages à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un lapin noir soit supérieure à 99% ?

Dans la deuxième partie de son spectacle, le magicien décide qu'un lapin tiré ne retourne plus dans le chapeau.

e) Quelle est la probabilité que les deux premiers lapins tirés soient de même couleur ?

f) Après trois tirages, il reste un lapin de chaque couleur dans le chapeau. Quelle est la probabilité que le troisième lapin tiré soit blanc ?

Le magicien ajoute dans le chapeau un lapin gris qui, lorsqu'il est tiré du chapeau, y retourne immédiatement, les blancs et les noirs n'y retournant pas.

g) Quelle est la probabilité qu'après deux tirages les trois lapins blancs soient encore dans le chapeau ?

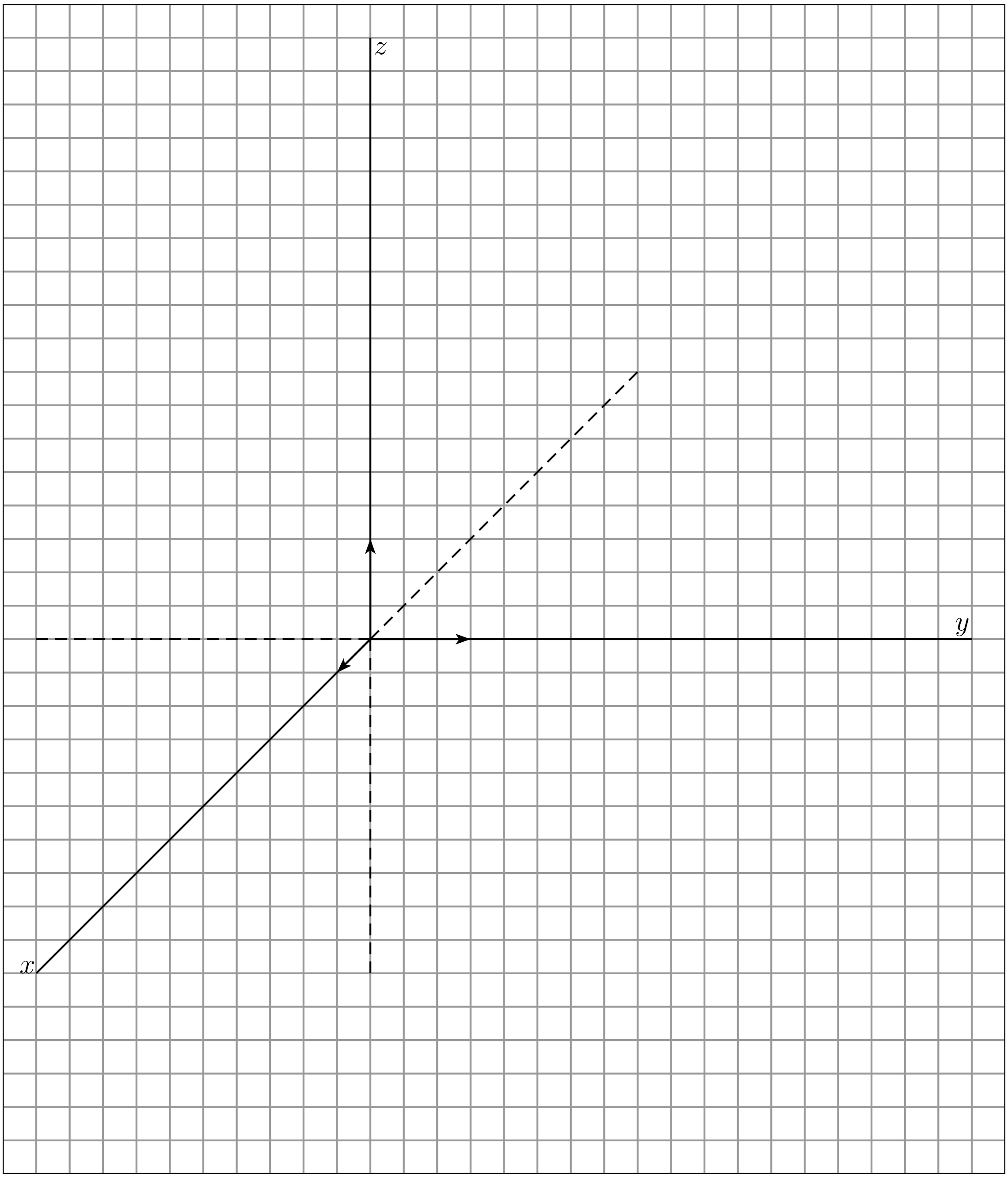
Un soir de grande fatigue le magicien a oublié de séparer les mâles des femelles et quelque temps plus tard il y a eu plusieurs naissances. Les nouveaux-nés sont soit blancs soit noirs et il les ajoute dans le chapeau. Il y a toujours un seul lapin gris.

h) Trouver le nombre actuel de lapins blancs et de lapins noirs sachant que la probabilité de tirer un lapin blanc vaut 50% et celle de tirer le lapin gris vaut 6.25%.

Annexe pour l'exercice 2

Classe :........................

Nom et prénom :...



Exercice 1

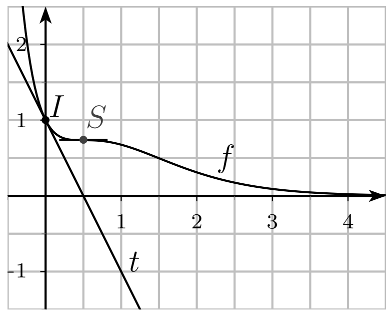
a) $ax^2 + 1 = 0$ admet une solution$\Rightarrow a \in]-\infty; 0[$

b) $f'(x) = (-2ax^2 + 2ax - 2)e^{-2x}$.
Unique solution pour$f'(x) = 0 \Rightarrow \triangle = 4a^2 - 16a = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \notin \mathbb{R}^* \text{ et } a_2 = 4$

c) $D = \mathbb{R}$ $\quad I(0; 1)$

x	
$f(x)$	$+$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ AH : $y = 0$
$f'(x) = (-8x^2 + 8x - 2)e^{-2x}$. Palier en $S(0.5; 2e^{-1})$



x		0.5	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	palier	$\searrow$

d) $f'(0) = -2 \Rightarrow t : y = -2x + 1$

e) $\sqrt{5}\cos(\alpha) = 2 \Rightarrow \alpha \simeq 26.57°$

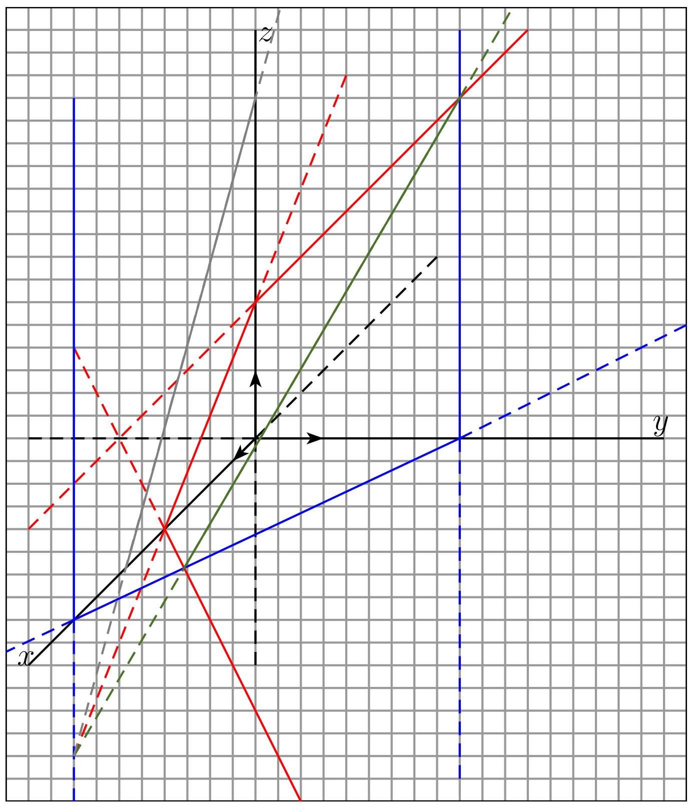
f) $F(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$
$F'(x) = (-2Ax^2 + (-2B + 2A)x + B - 2C)e^{-2x} = (4x^2 + 1)e^{-2x}$
$\Rightarrow A = B = -2$ et $C = -1.5$ $\qquad$ donc $F(x) = (-2x^2 - 2x - 1.5)e^{-2x}$

g) $h_3(x) = -x^3 = (-x)^3$ et $h_4(x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$

h) $A_{pétale} = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad A_{grisée} = 2\pi - 2$

Exercice 2

a) et b)



c) $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_\pi} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{n_\pi} = -2, \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \simeq 48.19°$

d) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.$I(0;0;2) \in \pi$ et $I(0;0;2) \in$ paroi $\Rightarrow i : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

e) dist($(5;1;2), \pi) = \dfrac{|\ 5-2+4-4\ |}{3} = 1$ =rayon=dist($(5;1;2)$,paroi)

$P_1 = d_{n_\pi} \cap \pi$ avec $d_{n_\pi} : \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}, \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow P_1\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

$P_2 = d_{n_{\text{paroi}}} \cap$ paroi avec $d_{n_{\text{paroi}}} : \begin{cases} x = 5 \\ y = 1+\lambda \\ z = 2 \end{cases}, \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P_2\,(5;0;2)$

f) $\pi' : x - 2y + 2z + d = 0$, dist($(0;0;2), \pi') = \dfrac{4+d}{3} = \pm 2 \Rightarrow d_1 = -10$ et $d_2 = 2$
Comme dist($(5;1;2), x-2y+2z-10=0) = 1$ et
dist($(5;1;2), x-2y+2z+2=0) \neq 1$, on a $\pi' : x-2y+2z-10=0$

g) $d : \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

h) $z = 1 \Rightarrow 2-\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1$. Centre $M(7;1;1)$

Exercice 3

a) $\mathbb{P}(\text{BN}) + \mathbb{P}(\text{NB}) = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{25}$

b) $\dbinom{5}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{144}{625}$

c) $3 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{216}{3125}$

d) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n < 0.01 \Rightarrow n > \dfrac{\ln(0.01)}{\ln(0.6)} \simeq 9.02 \Rightarrow n = 10$

e) $\mathbb{P}(\text{BB}) + \mathbb{P}(\text{NN}) = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{5}$

f) $\mathbb{P}(\text{BBN}) + \mathbb{P}(\text{BNB}) + \mathbb{P}(\text{NBB}) = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5}$

$\mathbb{P}(\text{3B}|\text{il reste un lapin de chaque couleur dans le chapeau}) = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{3}$

g) $\mathbb{P}(\text{NN}) + \mathbb{P}(\text{NG}) + \mathbb{P}(\text{GN}) + \mathbb{P}(\text{GG}) = \dfrac{2}{30} + \dfrac{2}{30} + \dfrac{2}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{39}{180}$

h) $\dfrac{1}{6+b+n} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow b+n = 10$ $\qquad \dfrac{3+b}{6+b+n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow n = b$

donc il y a $n+2 = 7$ lapins noirs et $b+3 = 8$ lapins blancs.