CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

**Session 2011**

## EXAMEN DE MATHÉMATIQUES - Discipline fondamentale

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

### Problème 1

On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 2}.$$

1. Vérifier que 1 est l'unique zéro de $f$.
2. Étudier $f$ complètement (avec la dérivée seconde) et la représenter graphiquement (unité : 1 cm).

### Problème 2

Pendant des années, les enseignants de mathématiques du Lycée cantonal se sont demandé quel type d'étude de fonction proposer pour les examens écrits : une rationnelle, une exponentielle ou une logarithmique ? Pour répondre une fois pour toutes à cette question lancinante, ils ont imaginé le protocole suivant.

Un sac opaque contient deux dés, un rouge et un vert. Un enseignant tire au hasard un des deux dés. Si le dé est rouge, on proposera une fonction rationnelle. Si le dé est vert, on le lance : si le résultat est 1, ce sera une rationnelle ; si c'est 2, 3 ou 4, ce sera une exponentielle ; si c'est 5 ou 6 ce sera une logarithmique.

1. Calculer la probabilité de proposer une fonction...

   (a) rationnelle (b) exponentielle (c) logarithmique.

2. Quelle est la probabilité de proposer trois années de suite le même type de fonction ?
3. Quelle est la probabilité de proposer une fonction de chaque type dans les trois années à venir ?
4. Pour les dix années à venir, quelle est la probabilité de proposer 5 rationnelles, 3 exponentielles et 2 logarithmiques ?
5. Sachant que l'on a proposé une fonction rationnelle cette année, quelle est la probabilité que l'on ait lancé le dé vert ?
6. Calculer le nombre d'années qu'il faudra attendre pour être sûr à plus de 95% d'avoir proposé au moins une fois une fonction logarithmique.

L'enseignant qui a fait le tirage au sort l'année passée est daltonien. Quand on lui montre du rouge, dans 1/3 des cas il pense que c'est du vert. Inversement, quand on lui montre du vert, dans 1/4 des cas il pense que c'est du rouge. Si bien qu'il lui arrive de lancer le dé rouge, pensant que c'est le vert, et de ne pas lancer le dé vert, pensant que c'est le rouge.

7. Quelle est la probabilité qu'il ait lancé le dé rouge ?
8. Quelle est la probabilité qu'il ait lancé le dé qu'il a sorti du sac ?
9. Quelle est la probabilité qu'il ait proposé une fonction logarithmique ?

(suite au verso)

**Problème 3**

Dans un repère orthonormé, on donne le plan $\pi : 2x+4y-z+17=0$ et les points $A(3;-1;-2)$, $B(0;2;4)$, $C(5;-1;2)$.

On considère aussi la droite $d : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & + & 2t \\ y & = & 22 & + & 14t \\ z & = & -1 & - & 3t \end{array}\right.$ .

1. Montrer que le plan $\pi$ est strictement parallèle au plan $(ABC)$.
2. Calculer la distance entre les plans $\pi$ et $(ABC)$.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection $S$ de la droite $d$ avec le plan $\pi$.
4. Calculer l'angle aigu que forme la droite $d$ avec le plan $\pi$.
5. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
6. Calculer les coordonnées du point symétrique $A'$ de $A$ par rapport au plan $\pi$.
7. Soit le cercle centré au point $\Omega(4;0;4)$, de rayon $r=\sqrt{14}$ et contenu dans le plan $(ABC)$.
   (a) Montrer que la droite $(AB)$ est tangente à ce cercle.
   (b) Calculer les coordonnées du point de tangence $T$.

**Problème 4**

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{4x+8}{x+3}$ dont la représentation graphique est l'hyperbole $\mathcal{H}$ et soit le point $A(1;3)$.

1. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{H}$ et les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec les axes, puis esquisser l'hyperbole.
2. Vérifier que le point $A$ appartient à $\mathcal{H}$.
3. Donner l'équation de la tangente $t$ au point $A$.
4. Soit $\mathcal{D}$ le domaine fermé, limité par la droite $t$, la verticale $x=-2$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$.
   (a) Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que $\dfrac{4x+8}{x+3}=a+\dfrac{b}{x+3}$.
   (b) En utilisant l'égalité précédente, calculer l'aire de $\mathcal{D}$.
5. Soit $C$ un point de l'hyperbole d'abscisse $x$ inférieure à $-3$. On considère alors le rectangle de diagonale $[AC]$ dont les côtés sont parallèles aux axes.
   (a) Montrer que l'aire d'un tel rectangle est donnée par $A(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$.
   (b) Calculer les coordonnées du point $C$ de telle sorte que ce rectangle soit d'aire extrémale. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ? Justifier.