JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

**Session 2010** **OS Physique - Application des mathématiques**

# MATHÉMATIQUES

*Temps à disposition : 4 heures*
*Note maximale (6) pour 5 problèmes justes*
*Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition*
*Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée*

## 1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter graphiquement (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{(t-e)^2}{t(t-2)} \qquad y(t) = \frac{10\ln(t)}{t}.$$

## 2. Géométrie dans l'espace

On donne les quatre points $A(9;14;-1)$, $B(12;2;-4)$, $C(3;2;-13)$ et $S(-12;-1;11)$.

2.1 Écrire l'équation cartésienne du plan $\pi$ contenant les points $A$, $B$ et $C$.

2.2 Prouver que le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle en $B$.

2.3 Déterminer les coordonnées du point $D$ pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

On considère encore la pyramide $\delta$ de base $ABCD$ et de sommet $S$.

2.4 Prouver que le pied $H$ de la hauteur de la pyramide $\delta$ issue de $S$ est le centre de la base carrée $ABCD$.

2.5 Calculer le volume de la pyramide $\delta$.

2.6 Écrire l'équation de la sphère $\sigma$ circonscrite à la pyramide $\delta$.

## 3. Algèbre linéaire et analyse complexe

Les trois parties du problèmes sont indépendantes.

3.1 Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $H = \begin{pmatrix} 3 & -2t \\ t & -3 \end{pmatrix}$ où $t$ est un paramètre réel.

3.1.1 Déterminer les valeurs de $t$ pour lesquelles $H$ admet des valeurs propres distinctes et calculer ces valeurs propres en fonction de $t$.

3.1.2 On pose maintenant $t = 2$. Déterminer les sous-espaces propres de $h$ et donner l'interprétation géométrique de $h$.

3.2 Soient les droites du plan $d : 3x - 5y = 0$ et $d' : 2x - 3y = 0$, et soit $p$ la projection sur $d$ parallèlement à $d'$. Donner la matrice de $p$ dans la base canonique.

3.3 Soit la fonction $f(z) = \dfrac{z-4}{z+1}$ où $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

3.3.1 Résoudre l'équation $f(z) = z$.

3.3.2 Pour $x$, $y$ réels, $x \neq 1$, exprimer $f(x+iy)$ sous la forme $a + ib$ avec $a$ et $b$ réels.

3.3.3 Déterminer les nombres complexes $z = x + iy$ pour lesquels $f(z)$ est purement imaginaire. Décrire géométriquement cet ensemble.

(suite au verso)

## 4. Probabilités

Lola découvre trois boîtes dans lesquelles se trouvent des friandises.

- Dans la boîte $A$ se trouvent 15 caramels aux fruits, dont 7 sont de couleur jaune, 3 de couleur rouge et 5 de couleur verte.
- Dans la boîte $B$ se trouvent 14 bonbons acidulés, dont 1 est de couleur jaune, 3 de couleur rouge et 10 de couleur verte.
- Dans la boîte $C$ se trouvent 24 gommes à mâcher, dont 9 sont de couleur jaune, 12 de couleur rouge et le reste de couleur verte.

Lola prend au hasard une friandise dans chaque boîte.

4.1 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris 3 friandises jaunes ?

4.2 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris exactement une friandise jaune ?

4.3 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris au moins une friandise jaune ?

4.4 Sachant qu'elle a pris exactement une friandise jaune, quelle est la probabilité que ce soit une gomme à mâcher ?

Lola plonge la main gauche dans la boîte $B$ et la main droite dans la boîte $C$. Elle prend au hasard 3 friandises dans chacune de ces deux boîtes.

4.5 Quelle est la probabilité qu'elle ait tiré 3 friandises jaunes en tout ?

4.6 Quelle est la probabilité qu'elle ait obtenu plus de friandises jaunes dans la main gauche que dans la main droite ?

4.7 En remettant les friandises dans leur boîte après chaque tirage, combien de fois devra-t-telle faire cette expérience pour avoir au moins 95% de chances d'avoir eu, au moins une fois, plus de friandises jaunes dans la main gauche que dans la main droite ?

Lola s'amuse à puiser uniquement dans la boîte $C$. Elle prend une gomme à mâcher, note sa couleur, et la remet dans la boîte. Elle fait cette expérience 100 fois.

4.8 Calculer une valeur approximative de la probabilité que Lola ait noté entre 35 et 45 fois (bornes comprises) la couleur jaune.

## 5. Analyse, problèmes divers

Les quatre questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

5.1 Résoudre l'équation différentielle $y' - 2\tan(x)y = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

5.2 Soit la série de puissances $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n \cdot 4^n}$.

Déterminer l'intervalle de convergence de cette série, puis reconnaître la fonction qu'elle représente.

5.3 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin^2(x)}$.

5.4 Soient $p$, $q > 1$ deux nombres réels tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

5.4.1 En examinant le tableau de signes de la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{x^q}{q} - x$ sur $[0; +\infty[$, démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$x \leqslant \frac{1}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

5.4.2 En posant $x = a^{-\frac{p}{q}} b$, démontrer que, pour tout $a$, $b > 0$, on a

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$