
Exercice 1 (poids 3)

▷ **Partie 1**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 4)$.

a) Etudier la fonction f, sans la deuxième dérivée. Dessiner le graphe dans un repère orthonormé en tenant compte de la pente de la tangente à l'origine.

b) Calculer l'angle formé par l'axe des x et le graphe de f en $x = 2$.

c) Hachurer la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des y, la droite verticale $x = 2$ et la droite horizontale $y = -4$. Calculer le volume obtenu lorsque cette surface tourne autour de l'axe des x.

La fonction g est définie par l'expression $g(x) = \sqrt{|x|} \cdot (x^2 - 4)$.

d) Dessiner le graphe de g dans le même repère que le graphe de f avec une autre couleur. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de g en son point d'abscisse $x = -1$.

▷ **Partie 2**

e) Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{3}{x}y = \ln(2x)$.

Exercice 2 (poids 3)

Une transformation linéaire f est donnée par sa matrice

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

relativement à la base orthonormée standard de $\mathbb{R}^3$.

a) Sachant que $\det(F - \lambda I) = -\lambda^3 + 36\lambda$, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres (ou sous-espaces propres) de f.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

Soit g la symétrie de plan $x - y = 0$.

c) Trouver la matrice de g relativement à la base standard de $\mathbb{R}^3$.

d) L'image par g du plan $\pi : x + z - 1 = 0$ est un plan π'. Trouver son équation.

On considère l'application linéaire $h = g \circ f$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$.

e) Trouver la matrice de h relativement à la base standard de $\mathbb{R}^3$.

f) Montrer que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont des vecteurs propres de h et déduire une interprétation géométrique de h.

Soit p la projection orthogonale sur la droite parallèle à $\overrightarrow{v_1}$ et passant par l'origine.

g) Pour quelles valeurs du nombre α la transformation $\frac{1}{6}f + \alpha p$ est-elle une symétrie (axiale ou planaire) ? Justifier la réponse.
Indication : utiliser la base $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$.

Exercice 3 (poids 2)

▷ Partie 1

Le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 4z + 8$ s'annule pour un nombre complexe $z = yi$ avec $y \in \mathbb{R}$.

a) Trouver les valeurs possibles de y.

b) Déduire que $P(z)$ est divisible par $z^2 + 2$ puis trouver tous les zéros de $P(z)$.

▷ Partie 2

Soit f l'application qui associe à un nombre complexe $z \neq i$ l'image $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$

c) Vérifier que la fonction réciproque f^{-1} est égale à la composition $f \circ f$.

Pour $z = x + yi$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), on trouve $f(z) = u + vi$ avec

$$u = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1-y}{x^2 + (y-1)^2}$$

d) Dans le plan de Gauss, quelle figure forment les nombres z dont l'image $f(z)$ est un nombre réel ?

e) Démontrer que l'image par f de l'axe réel est contenue dans un cercle centré en $z_0 = \frac{1}{2}i$. Trouver le rayon de ce cercle.

Exercice 4 (poids 2)

15% des voitures sortant d'une certaine chaîne de montage sont défectueuses. Toutes les voitures sortant de cette chaîne de montage sont acheminées vers le service du contrôle final, où travaillent deux techniciens, A et B. Chaque voiture est contrôlée exactement une fois.

Le technicien A détecte 90% des voitures défectueuses, alors que le technicien B ne détecte que 80% des voitures défectueuses.

a) Quelle est la probabilité que parmi 10 voitures sortant de la chaîne de montage, la moitié soit défectueuse ?

b) Le technicien A contrôle une voiture. Quelle est la probabilité que cette voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée ?

c) Combien de voitures au minimum le technicien A doit-il contrôler pour que la probabilité qu'il détecte au moins une voiture défectueuse dépasse 95% ?

d) Le technicien A commence à travailler. Soit N le nombre de voitures qu'il doit contrôler jusqu'à ce qu'il détecte une voiture défectueuse. Calculer l'espérance (moyenne) de N.

Indication : $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-r)^2}$ si $|r| < 1$.

e) Les techniciens A et B contrôlent chacun une voiture différente. Quelle est la probabilité qu'ils ne détectent aucune défectuosité ?

On admet pour la suite du problème que chaque voiture a la même probabilité d'être contrôlée par le technicien A que par le technicien B.

f) Quelle est la probabilité qu'une voiture défectueuse ne soit pas détectée lors d'un contrôle ?

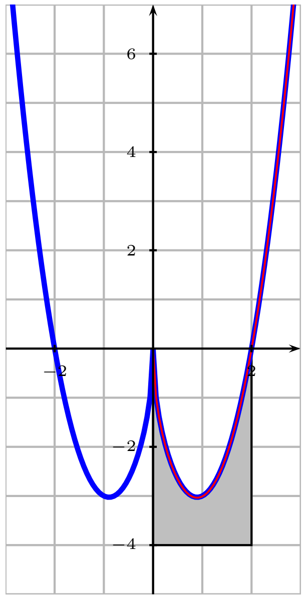
g) Une voiture sort de la chaîne de montage et est acheminée vers le service du contrôle final. Quelle est la probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée ?

h) Sachant que sur une certaine voiture aucune défectuosité n'a été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question soit défectueuse.

Exercice 1

a) $D = [0; \infty[$, $I_y(0;0)$, $I_{x1}(0;0)$, $I_{x2}(2;0)$

x (de 0 à ∞)		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$



$f(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Pas d'asymptote $y = mx + h$ à l'infini car

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{5x^2-4}{2\sqrt{x}}$$

x (de 0 à ∞)		$\sqrt{0.8}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$ (de 0 à ∞)	$\searrow$	min	$\nearrow$

Minimum en $H(-0.894; -3.026)$

$\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \text{“}\frac{-4}{+0}\text{”} = -\infty.$

b) $\tan^{-1}(f'(2)) = \tan^{-1}(8/\sqrt{2}) \cong 79.975°$

c) Il suffit de soustraire au volume d'un cylindre (de hauteur 2 et rayon 4) le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe des x le graphe de f pour $x \in [0; 2]$:

$$\begin{aligned} V &= 32\pi - \pi \int_0^2 f(x)^2 dx = 32\pi - \pi \int_0^2 (x^5 - 8x^3 + 16x)dx \\ &= 32\pi - \pi \left[\frac{1}{6}x^6 - 2x^4 + 8x^2\right]_0^2 = 32\pi - \pi\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{64\pi}{3} \end{aligned}$$

d) La tangente au graphe de f en $(1; -3)$ est $y = mx + h$ avec $m = f'(1) = 0.5$ donc $y = 0.5x + h$. Le point $(1; -3)$ indique $-3 = 0.5 + h$, donc $h = -3.5$ et $y = 0.5x - 3.5$. La tangente au graphe de g en $(-1; -3)$ est par symétrie $y = -0.5x - 3.5$.

e) $a(x) = \frac{-3}{x}$ donc $A(x) = -3\ln(x)$, $u(x) = e^{A(x)} = \frac{1}{x^3}$, puis

$$v(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} dx = \int \overset{\overset{x^4/4}{\downarrow}}{x^3} \underset{\underset{1/x}{\downarrow}}{\ln(2x)} dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(2x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4 + C.$$

Au total, on a la solution générale $y = uv = \frac{1}{4}x\ln(2x) - \frac{1}{16}x + \frac{C}{x^3}$.

Exercice 2

a) $\lambda = 0 \longleftrightarrow m\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad \lambda = -6 \longleftrightarrow m\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\quad \lambda = 6 \longleftrightarrow m\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) Noyau : droite parallèle à $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad$ image : plan $x + y - 2z = 0$.

c) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) L'application g échange les coordonnées x et y de chaque point donc l'image de π est $\pi' : y + z - 1 = 0$

e) $H = GF = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $h(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{0}$, $h(\overrightarrow{v_2}) = 6\overrightarrow{v_2}$ et $h(\overrightarrow{v_3}) = 6\overrightarrow{v_3}$. La transformation h est une projection orthogonale sur le plan $x + y - 2z = 0$ suivie d'une homothétie de facteur 6 par rapport à l'origine.

g) Dans la base orthogonale $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$, la matrice de $\frac{1}{6}f + \alpha p$ est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle décrit une symétrie pour $\alpha = 1$ (symétrie planaire) ou $\alpha = -1$ (symétrie axiale).

Exercice 3 : voir page suivante

Exercice 4

a) $\binom{10}{5}(0.15)^5(0.85)^5 = 252(0.15)^5(0.85)^5 \cong 0.849\%$

b) $0.15 \cdot 0.9 = 0.135$

c) On cherche l'entier n minimal de sorte que $1 - (0.865)^n > 0.95$; $(0.865)^n < 0.05$; $n \ln(0.865) < \ln(0.05)$; $n > \dfrac{\ln(0.05)}{\ln(0.865)} \cong 20.66$, donc $n = 21$

d) Pour un entier $k \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(N = k) = (0.865)^{k-1}(0.135)$, donc

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(N = k) = 0.135 \sum_{k\geqslant 0} k(0.865)^{k-1} = \frac{0.135}{(1 - 0.865)^2} = \frac{1}{0.135} \cong 7.41$$

e) $(0.15 \cdot 0.1 + 0.85)(0.15 \cdot 0.2 + 0.85) = 0.865 \cdot 0.88 = 0.7612$

f) $0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.15$

g) $\mathbb{P}(\text{contrôle OK}) = 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.2 + 0.85 = 0.8725$

h) $\mathbb{P}(\text{voiture KO}|\text{contrôle OK}) = \dfrac{0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.2}{0.8725} = \dfrac{0.0225}{0.8725} \cong 2.58\%$

Exercice 3

a) On a $P(yi) = y^4 - 2y^3 i - 6y^2 + 4yi + 8 = \underbrace{(y^4 - 6y^2 + 8)}_{=0 \text{ (relation 1)}} + \underbrace{(4y - 2y^3)}_{=0 \text{ (relation 2)}}\, i$. La deuxième relation $(2y(2-y^2) = 0)$ est vérifiée pour $y = 0$ (exclu pour la première relation) et $y = \pm\sqrt{2}$ (ok pour la première relation).

b) Le polynôme $P(z)$ est divisible par $(z - \sqrt{2}\,i)(2 + \sqrt{2}\,i) = z^2 + 2$ et une division euclidienne montre que $P(z) = (z^2+2)(z^2-2z+4)$. Le quotient $Q(z) = z^2 - 2z + 4$ s'annule pour $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3}\,i$

c) $(f \circ f)(z) = 1 \Big/ \left(\dfrac{1}{z-i} - i\right) = 1 \Big/ \dfrac{-iz}{z-i} = \dfrac{z-i}{-iz} = \dfrac{iz+1}{z} = i + \dfrac{1}{z}$

$w = f(z) \iff z - i = \dfrac{1}{w} \iff z = i + \dfrac{1}{w} = f^{-1}(w)$ donc $f^{-1}(z) = i + \dfrac{1}{z}$.

d) La relation $v = 0$ se traduit par $y = 1$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$, donc $x \neq 0$. L'ensemble cherché est la droite horizontale $y = 1$ privée du point $(0;1)$ correspondant à $z = i$.

e) La relation $y = 0$ implique $u = \dfrac{x}{x^2+1}$ et $v = \dfrac{1}{x^2+1}$. On a donc

$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \left(\frac{1-x^2}{2(x^2+1)}\right)^2 = \frac{1}{4(x^2+1)^2}\underbrace{\left(4x^2 + (1-x^2)^2\right)}_{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}$$

Variante : Pour $z \in \mathbb{R}$ $(*)$, on a

$$\left|f(z) - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{2 - i(z-i)}{2(z-i)}\right| = \left|\frac{1-iz}{2(z-i)}\right| = \frac{|1-iz|}{2|z-i|} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2}$$

Le cercle en question admet le rayon $r = \frac{1}{2}$.