

Session 2010

OS Biologie et Chimie

# MATHÉMATIQUES

*Temps à disposition : 4 heures**Note maximale (6) pour 5 problèmes justes**Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition**Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée*

## 1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (sur une page entière en format paysage, unité : 2 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{3t}{t^3-1}.$$

## 2. Géométrie dans l'espace

On donne les quatre points  $A(9; 14; -1)$ ,  $B(12; 2; -4)$ ,  $C(3; 2; -13)$  et  $S(-12; -1; 11)$

2.1 Écrire l'équation cartésienne du plan  $\pi$  contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

2.2 Prouver que le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $B$ .

2.3 Déterminer les coordonnées du point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un carré.

On considère encore la pyramide  $\delta$  de base  $ABCD$  et de sommet  $S$ .

2.4 Prouver que le pied  $H$  de la hauteur de la pyramide  $\delta$  issue de  $S$  est le centre de la base carrée  $ABCD$ .

2.5 Calculer le volume de la pyramide  $\delta$ .

2.6 Écrire l'équation de la sphère  $\sigma$  circonscrite à la pyramide  $\delta$ .

## 3. Algèbre linéaire

Soit un endomorphisme  $h$  donné par sa matrice  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$  relativement à la base canonique

de  $\mathbf{R}^2$ . Soit encore le vecteur  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ .

3.1 Calculer  $\mathbf{Mv}$ . Que peut-on déduire du résultat ?

3.2 Déterminer une base dans laquelle la matrice de  $h$  s'écrit  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

3.3 Donner l'interprétation géométrique de cet endomorphisme.

3.4 Dans la base canonique, déterminer l'image de la droite  $y = 2x$ .

3.5 Calculer  $\mathbf{K}^2$ . Deviner une expression pour  $\mathbf{K}^n$  (sans démonstration) et en déduire la matrice  $\mathbf{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}^n$ .

3.6 Exprimer la matrice  $\mathbf{L}$  dans la base canonique.

Suite au verso

## 4. Probabilités

Lola découvre trois boîtes dans lesquelles se trouvent des friandises.

- Dans la boîte  $A$  se trouvent 15 caramels aux fruits, dont 7 sont de couleur jaune, 3 de couleur rouge et 5 de couleur verte.
- Dans la boîte  $B$  se trouvent 14 bonbons acidulés, dont 1 est de couleur jaune, 3 de couleur rouge et 10 de couleur verte.
- Dans la boîte  $C$  se trouvent 24 gommes à mâcher, dont 9 sont de couleur jaune, 12 de couleur rouge et le reste de couleur verte.

Lola prend au hasard une friandise dans chaque boîte.

- 4.1 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris 3 friandises jaunes ?
- 4.2 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris exactement une friandise jaune ?
- 4.3 Quelle est la probabilité qu'elle ait pris au moins une friandise jaune ?
- 4.4 Sachant qu'elle a pris exactement une friandise jaune, quelle est la probabilité que ce soit une gomme à mâcher ?

Lola plonge la main gauche dans la boîte  $B$  et la main droite dans la boîte  $C$ . Elle prend au hasard 3 friandises dans chacune de ces deux boîtes.

- 4.5 Quelle est la probabilité qu'elle ait tiré 3 friandises jaunes en tout ?
- 4.6 Quelle est la probabilité qu'elle ait obtenu plus de friandises jaunes dans la main gauche que dans la main droite ?
- 4.7 En remettant les friandises dans leur boîte après chaque tirage, combien de fois devra-t-elle faire cette expérience pour avoir plus de 95% de chances d'avoir eu, au moins une fois, plus de friandises jaunes dans la main gauche que dans la main droite ?

Lola s'amuse à puiser uniquement dans la la boîte  $C$ . Elle prend une gomme à mâcher, note sa couleur, et la remet dans la boîte. Elle fait cette expérience 100 fois.

- 4.8 Calculer une valeur approximative de la probabilité que Lola ait noté entre 35 et 45 fois (bornes comprises) la couleur jaune.

## 5. Analyse, problèmes divers

5.1 Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}.$$

5.2 Calculer

$$\int_1^5 (2x - 5) \ln(x) dx.$$

5.3 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$\cos(x) y' + \sin(x) y = 1.$$

5.4 Soit la fonction complexe

$$f(z) = \frac{z - 4}{z + 1}.$$

Déterminer l'ensemble des points  $z$  dont l'image  $f(z)$  est purement imaginaire et le représenter dans le plan de Gauss.