Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 **(13 points)**

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{(2\ln(x)+3)^2}{x} \text{ pour } x > 0.$$

1.1 Déterminer les équations des asymptotes au graphe de f.

1.2 Déterminer les éventuels minimum et maximum de f.

1.3 A l'aide du graphe de f, discuter, selon les valeurs du réel k, du nombre de solutions de l'équation : $f(x) = k$. (Le calcul des solutions n'est pas demandé)

1.4 Calculer la valeur de t pour que l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des x sur l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{e^3}}; t]$ soit égale à 36.

Problème 2 **(7 points)**

Calculer le volume obtenu par la rotation, autour de la droite d'équation $x = -2$, du domaine non borné du **troisième quadrant** délimité par la courbe $y = \dfrac{x+4}{x+2}$, l'axe des x et la verticale $x = -2$.

Problème 3 **(10 points)**

On donne la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1-k & k+1 & 0 \\ k-1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, où k est un paramètre réel.

3.1 On pose $k = 1$. Calculer les valeurs propres de A_1.

3.2 Etablir une base vectorielle du sous-espace

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tel que } A_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

3.3 Pour quelle(s) valeur(s) de k le rang de A_k vaut-il 2 ?

3.4 On pose $k = 0$. Calculer la matrice inverse de A_0.

Problème 4 (11 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les éléments suivants :

- le triangle (T_1) qui a pour sommets $O(0;0;0)$, $A(0;0;9)$ et $B(12;0;0)$;
- le triangle (T_2) qui a pour sommets $C(0;12;0)$, $D(0;12;9)$ et $E(12;12;0)$, ce qui signifie que (T_2) s'obtient de (T_1) par déplacement de 12 unités dans le sens du vecteur $\vec{j}$;
- le prisme droit (P) de bases triangulaires (T_1) et (T_2) dont les faces latérales sont les rectangles $ABED$, $OBEC$ et $OCDA$.
- le plan (α) d'équation $2x + 3y + 6z = 66$;
- le triangle (T_3) défini par l'intersection du plan (α) avec le prisme (P).

4.1 Etablir la représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans (ABD) et (α).

4.2 Représenter le prisme (P) et le triangle (T_3) dans un repère orthonormé.

4.3 Montrer que la droite d'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

est équidistance aux trois faces latérales (rectangulaires) du prisme (P).

4.4 Déterminer l'équation de la sphère qui est à la fois tangente aux 3 faces rectangulaires du prisme (P) et tangente au plan (α).

Problème 5 (11 points)

Un paquet de cartes est constitué de n cartes rouges et de $2n$ cartes noires. On extrait au hasard, **successivement** deux cartes de ce jeu.

5.1 Calculer la probabilité de l'événement A :" tirer deux cartes de même couleur ".

5.2 Pour quelle(s) valeur(s) de n la probabilité de A est-elle supérieure à 0.55 ?

5.3 Calculer la probabilité de l'événement B :"tirer une carte rouge en premier sachant qu'on a tiré deux cartes de même couleur".

5.4 Pour quelle valeur de n la probabilité de B est-elle nulle ?

Pour la suite de l'exercice, on utilise 7 cartes rouges et 14 cartes noires.

On considère le jeu suivant : On extrait au hasard simultanément deux cartes de ce jeu. Si on a deux cartes de même couleur, on marque un point. Sinon, on ne marque pas de point. Puis on remet les 2 cartes dans le paquet.
On joue 900 fois. Soit X le nombre de points marqués.

5.5 Déterminer l'intervalle centré sur la moyenne tel que la probabilité que X appartienne à cet intervalle soit au moins de 76%.