JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2009

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES - OS Biologie Chimie

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des “Formulaires et Tables” à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

Étudier, puis représenter graphiquement (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{8}{t^2 - 2t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t^2}{t-2}$$

Problème 2

On donne les quatre points $A(1;1;4)$, $B(9;5;12)$, $C(5;6;2)$ et $T(3;2;6)$.

1. Ecrire une représentation paramétrique de la droite $d = (AB)$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Etablir une équation cartésienne de la sphère Σ de centre C et passant par le point T.
4. Montrer que la droite d est tangente à la sphère Σ au point T.
5. Ecrire une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ et coupant la droite d à angle droit en T.

L'ensemble des droites parallèles à la droite d et tangentes à la sphère Σ forment un cylindre κ.

6. On donne le point $D(5;0;-4)$ appartenant au cylindre κ.
   Etablir l'équation cartésienne du plan tangent au cylindre κ en D.
7. On considère une partie du cylindre κ délimitée par deux cercles et de volume 540π. Un des cercles a pour centre le point C ; l'autre cercle a pour centre le point C' dont toutes les coordonnées sont positives.
   Déterminer le point C'.

Problème 3

a) Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a, non nul, ayant pour image le vecteur nul.
2. Déterminer les valeurs propres de h et les vecteurs propres associés.
3. Ecrire la matrice H' de h dans une base de vecteurs propres.
4. Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire h.

b) Dans $\mathbb{C}$, on considère la fonction $f(z) = z + \dfrac{i}{z}$ et le nombre complexe $w = 1 + i$.

1. Calculer w^6 et représenter ce nombre dans le plan de Gauss.
2. Calculer le plus petit entier positif n tel que w^n soit un nombre réel supérieur à 2009.
3. Déterminer, sous forme cartésienne, l'image du nombre w par f.
4. Déterminer tous les nombres complexes qui ont pour image 2 par f.
5. Déterminer et représenter graphiquement dans le plan de Gauss l'image de l'axe imaginaire par f.

(suite au verso)

Problème 4

Chez l'homme, il existe quatre groupes sanguins : O, A, B et AB.

a) A un repas d'anniversaire, 10 personnes sont réunies dans un chalet :
3 du groupe sanguin O, 4 du groupe sanguin A, 2 du groupe sanguin B et 1 du groupe sanguin AB.

Après le repas, par tirage au sort, on désigne successivement 3 personnes pour faire la vaisselle.

Calculer la probabilité des événements suivants :
E_1 : exactement deux personnes du groupe sanguin A sont désignées
E_2 : la deuxième personne désignée est du groupe sanguin B
E_3 : les 3 personnes désignées ont le même groupe sanguin
E_4 : les 3 personnes désignées ont des groupes sanguins différents.

b) Dans chaque groupe, il y a deux facteurs Rhésus : $+$ et $-$.

En Suisse, la répartition de la population selon les divers groupes sanguins et facteurs Rhésus est donnée par le tableau suivant :

	O	A	B	AB
Rhésus $+$	35%	40%	7%	3%
Rhésus $-$	6%	7%	1%	1%

1. On rencontre au hasard une personne de nationalité suisse.

   Calculer la probabilité des événements suivants :
   E_5 : cette personne est du groupe sanguin A
   E_6 : cette personne est du groupe sanguin A sachant qu'elle a un facteur Rhésus $-$.

2. Dans un lycée, une classe compte 20 élèves de nationalité suisse.

   Calculer la probabilité des événements suivants :
   E_7 : exactement sept élèves de cette classe sont du groupe sanguin A
   E_8 : dans cette classe, on recense cinq élèves de chaque groupe sanguin.

3. Cent personnes de nationalité suisse participent à un congrès.

   Calculer une approximation de la probabilité que, parmi les personnes présentes, il y ait entre 38 et 50 (bornes comprises) individus du groupe sanguin A.

Problème 5

a) Soit la fonction $f(x) = -2x\ln(x)$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'extremum de f et la nature de cet extremum.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers zéro par la droite.
3. Déterminer le point d'intersection I du graphe de f avec l'axe des x, et dessiner une esquisse du graphe de f pour $x \in [0; 2]$ (unité : 4 carrés).
4. Déterminer l'angle d'intersection entre le graphe de f et l'axe des x au point I.
5. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les deux droites verticales $x = 0,5$ et $x = 1$.
6. Déterminer un point A du graphe de f où la pente de la tangente vaut le double de la pente de la droite (OA).

b) Soit l'équation différentielle : $x \cdot y' = 2y$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer la solution particulière de cette équation dont la tangente au point d'abscisse 4 est parallèle à la droite d'équation $3x + 2y - 6 = 0$.