Problème 1 (poids 2)

On considère la fonction $f : x \mapsto y = (ax^2 + 2ax) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel non nul.

a) Vérifier que pour toute valeur de a le graphe de f coupe l'axe des abscisses en deux points. Calculer les abscisses de ces points.

b) Vérifier également que pour toute valeur de a le graphe de f possède deux points à tangente horizontale. Calculer les abscisses de ces points.

c) Déterminer la valeur de a pour laquelle la tangente au graphe de f à l'origine est la droite d'équation $y = -2x$.

Pour la suite du problème, on choisit $a = -1$, donc $f(x) = (-x^2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

d) Étudier la fonction f, sans la parité. Dessiner le graphe en prenant deux carreaux comme unité.

e) Dessiner dans le même repère la tangente au graphe de f à l'origine.
Calculer l'angle aigu que forment la tangente et l'axe des abscisses.

f) Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = -2$ et $x = 2$.
Calculer l'aire de cette surface.

g) En observant le graphe de f, déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ possède une seule solution.

Problème 2 (poids 2)

Remarque : *Pour tous les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4). Employer différentes couleurs.*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;4)$ et $D(5;4;-2)$.

a) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

b) Déterminer des équations paramétriques de la droite d, perpendiculaire au plan ABC et passant par le sommet C du triangle.

c) Calculer les coordonnées de la trace de la droite d dans le sol.

d) Montrer qu'une équation cartésienne du plan α contenant le triangle ABC est $4x+3y-3z-12=0$.

e) Dessiner les traces du plan α.

f) Calculer l'aire du triangle ABC, la distance du point D au plan α, ainsi que le volume du tétraèdre $ABCD$.

On considère un deuxième plan β, d'équation $6x+3y+2z-18=0$.

g) Dessiner les traces du plan β ainsi que la droite d'intersection i des plans α et β.

h) Déterminer un vecteur directeur de la droite i.

i) Calculer l'angle aigu entre le plan β et le mur.

On considère encore la sphère s_1 d'équation $(x-7)^2+(y-9)^2+(z+1)^2=36$.

j) Montrer que la sphère s_1 ne coupe pas le plan β.

k) Déterminer le point P de β qui est le plus proche de la sphère s_1.

l) La sphère s_2, symétrique de s_1 par rapport à un plan π, est centrée en $\Omega(-1;1;3)$. Déterminer une équation cartésienne du plan π.

Problème 3 (poids 1)

Le lecteur de disques compacts d'Antoine peut lire les disques selon deux modes :

- Dans le mode « Normal », les morceaux sont lus les uns après les autres, du premier au dernier.
- Dans le mode « Random » (hasard) les morceaux sont lus dans un ordre aléatoire, chaque morceau étant lu une seule fois.

Chaque fois qu'on enclenche le lecteur, le mode de lecture est choisi automatiquement de la manière aléatoire suivante :

- La probabilité que le mode « Normal » soit sélectionné vaut $\frac{2}{3}$;
- La probabilité que le mode « Random » soit sélectionné vaut $\frac{1}{3}$.

De plus, une fois que le lecteur a été enclenché, le mode de lecture peut être modifié par l'utilisateur.

Première partie

Antoine insère dans son lecteur un disque contenant six morceaux, numérotés de 1 à 6, et décide d'écouter tout le disque dans le mode « Random ».

a) Quelle est la probabilité que son lecteur commence par lire les morceaux portant les numéros 6 et 5, dans cet ordre ?

b) Quelle est la probabilité que le morceau numéro 3 passe en troisième position ?

c) Quelle est la probabilité que le morceau préféré d'Antoine ne figure pas parmi les quatre premiers morceaux lus ?

d) Quelle est la probabilité que tous les morceaux soient lus dans l'ordre original, c'est-à-dire de 1 à 6 ?

e) Si Antoine écoute son disque cinq fois de suite (chaque fois dans le mode « Random »), quelle est la probabilité que la lecture commence deux fois par le morceau numéro 6 ?

Deuxième partie

Antoine éteint son lecteur, l'enclenche à nouveau, et écoute le même disque qu'avant dans son intégralité, sans modifier le mode de lecture sélectionné par l'appareil.

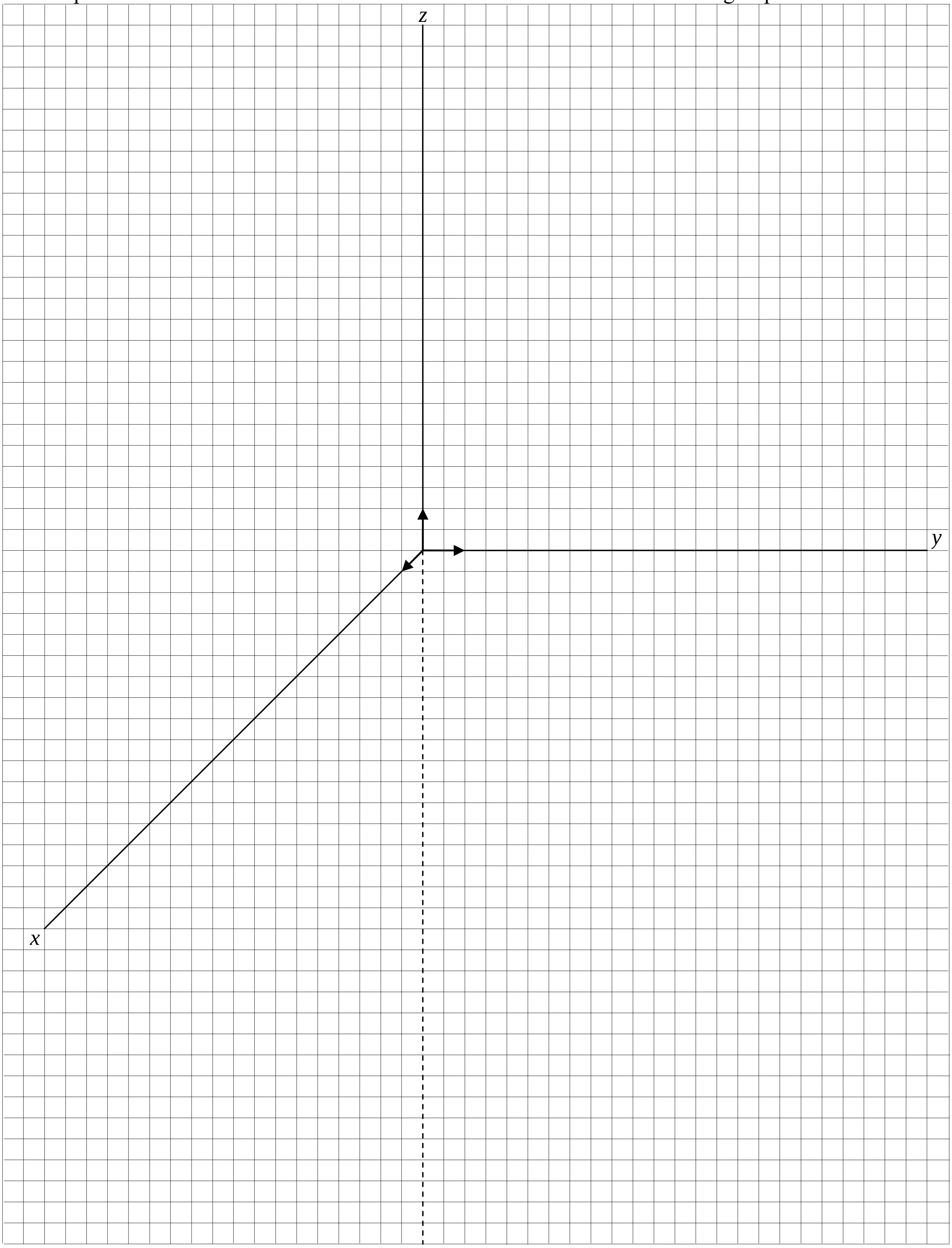
f) Quelle est la probabilité que le morceau numéro 1 ne passe pas en premier ?

g) Quelle est la probabilité que le morceau numéro 3 passe en troisième position ?

h) Si l'on sait que le premier morceau lu est celui qui porte le numéro 1, quelle est la probabilité que le mode de lecture sélectionné soit « Random » ?

Nom et prénom :

Classe ou groupe :



Problème 1 (solution)

$f : x \mapsto y = (ax^2 + 2ax) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $(a \in \mathbb{R}^*)$

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2ax = 0 \Leftrightarrow ax \cdot (x+2) = 0$, donc $x_1 = 0$ et $x_2 = -2$

b) $f'(x) = (-ax^2 + 2a) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ax^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$, donc $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$

c) $f'(x) = (-ax^2 + 2a) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $f'(0) = 2a$ et $f'(0) = -2$ (pente de la tangente) $\Rightarrow a = -1$

d) $f(x) = (-x^2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $D = \mathbb{R}$, $I_1(-2;0)$, $I_2(0;0)$

x		-2		0	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \to -\infty \Rightarrow y \longrightarrow -\infty$
$x \to +\infty \Rightarrow y \xrightarrow{<} 0$ donc la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à droite.

$f'(x) = (x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ d'où les deux points à tangente horizontale $H_1(-1.41;3.41)$ et $H_2(1.41;-1.17)$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

e) $f'(0) = -2$ et $\alpha = |\arctan(-2)| = 63.43^\circ$

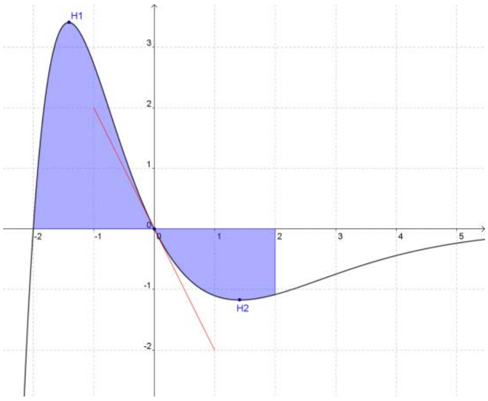
f) L'aire vaut $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, il faut donc trouver une primitive $F(x)$

$F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c) \cdot \mathrm{e}^{-x}$,

$F'(x) = f(x) \Rightarrow$ $a = 1$, $b = 4$ et $c = 4$, donc $F(x) = (x^2 + 4x + 4) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$F(0) = 4$, $F(-2) = 0$, $F(2) = 16 \cdot \mathrm{e}^{-2} \cong 2.17$ et l'aire vaut $8 - 16 \cdot \mathrm{e}^{-2} \cong 5.83$

g) $k \in \left]-\infty;-1.17\right[\cup \{3.41\}$ (-1.17 = ordonnée de H_2 et 3.41 = ordonnée de H_1)



Problème 2 (solution)

$A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;4)$, $D(5;4;-2)$

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=5$

b) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}16\\12\\-12\end{pmatrix} // \begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$ d'où $d:\begin{cases}x=3+4\lambda\\y=4+3\lambda\\z=4-3\lambda\end{cases}$

c) $\lambda=\frac{4}{3}\Rightarrow T_s\left(\frac{25}{3};8;0\right)$

d) $\alpha\perp\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $A\in\alpha\Rightarrow\alpha:4x+3y-3z-12=0$

e) $\alpha:4x+3y-3z-12=0$, $I_x(3;0;0)$, $I_y(0;4;0)$, $I_z(0;0;-4)$

f) Aire du triangle $=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{544}=2\sqrt{34}\cong 11.66$, $\Delta(\alpha;D)=\frac{26}{\sqrt{34}}\cong 4.46$ et

$V=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{34}\cdot\frac{26}{\sqrt{34}}=\frac{52}{3}$

g) $\beta:6x+3y+2z-18=0$, $I_x(3;0;0)$, $I_y(0;6;0)$, $I_z(0;0;9)$

h) $i \mathbin{//} \vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-26\\-6\end{pmatrix}$

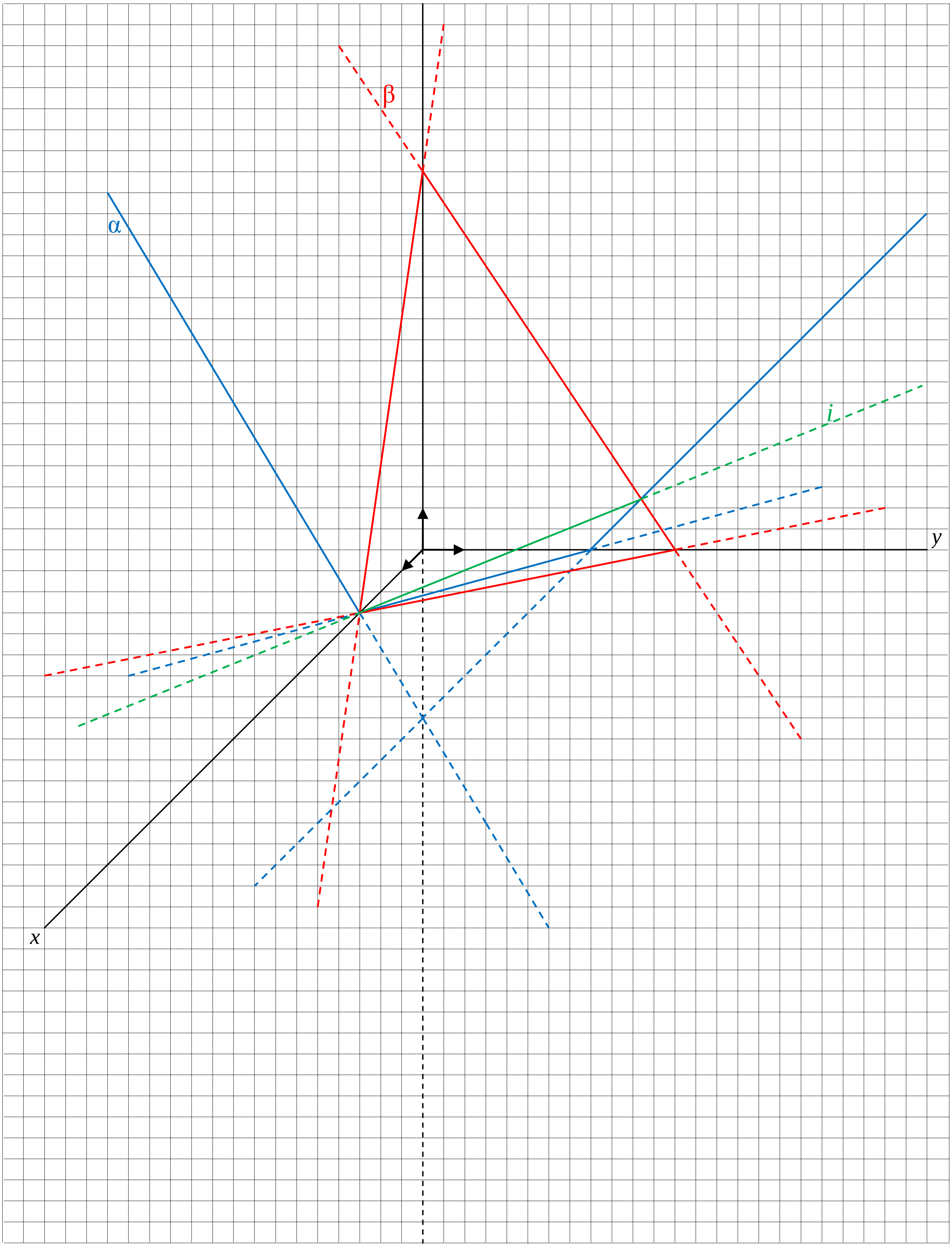
i) $\vec{n}_\beta=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{n}_{mur}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\cos(\varphi)=\frac{6}{7}$ et $\varphi\cong 31^{o}$

j) $s_1:(x-7)^2+(y-9)^2+(z+1)^2=36$, $M_1(7;9;-1)$, $r_1=6$, $\Delta(\beta;M_1)=\frac{49}{7}=7$ donc $\Delta>r_1$

k) La droite $p:\begin{cases}x=7+6\lambda\\y=9+3\lambda\\z=-1+2\lambda\end{cases}$ est perpendiculaire à β et passe par M_1, $p\cap\beta\Rightarrow\lambda=-1$, d'où le point $P(1;6;-3)$

l) $M_1(7;9;-1)$, $\Omega(-1;1;3)$, le plan π passe par $M(3;5;1)$ (milieu du segment $M_1\Omega$) et est normal à $\overrightarrow{\Omega M}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix} // \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\pi:2x+2y-z-15=0$

Problème 2 (solution)



Problème 3 (solution)

a) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{720}$

e) $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=10\cdot\frac{125}{7776}=\frac{625}{3888}\cong 16.08\%$

f) $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$

g) $\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$

h) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{13}{18}}=\frac{1}{13}$