MATHÉMATIQUES STANDARD

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (15 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4x + 4\right)$$

1.1 Etudier cette fonction (sans calculer la dérivée seconde) et représenter sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

1.2 On considère le domaine situé entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe O_x sur l'intervalle $[\,-1\,;0\,]$.

1.2.1 Vérifier que sur ce domaine, en isolant x dans la relation

$$y = \ln\left(x^2 + 4x + 4\right)$$

on obtient

$$x = e^{\frac{y}{2}} - 2$$

1.2.2 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine autour de l'axe O_y.

Problème 2 (14 points)

Les parties 2.2 et 2.3 doivent être résolues analytiquement et non pas graphiquement. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille.

Dans un repère orthonormé, on considère les éléments suivants :

- les points $A(\,4\,;6\,)$, $B(\,6\,;0\,)$, $C(\,1\,;0\,)$ et $D(\,-3\,;1\,)$,
- le cercle Γ_1 passant par les points A, B et C,
- le cercle Γ_2 de centre D et passant par l'origine O,
- la tangente t à Γ_2, parallèle à (AB) et la plus éloignée de (AB).

2.1 Représenter les éléments dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

2.2 Déterminer les équations des cercles Γ_1 et Γ_2. Ces deux cercles sont-ils tangents ? Justifier votre réponse.

2.3 Déterminer l'équation de la tangente t.

Problème 3 **(9 points)**

Dans le premier quadrant du repère orthonormé représenté ci-dessous, on considère le point $C(1;3)$ et les points mobiles A et B, alignés avec C et situés respectivement sur l'axe O_y et l'axe O_x.
Dans le triangle rectangle AOB, on appelle β l'angle en B et on définit la fonction $L(\beta)$ comme étant la somme des longueurs du côté adjacent et du côté opposé à β.

3.1 Montrer que

$$L(\beta) = 4 + \frac{3}{\tan(\beta)} + \tan(\beta)$$

3.2 Pour quel angle β la longueur $L(\beta)$ est-elle minimale ? Quelle est cette longueur minimale ?

Problème 4 **(15 points)**

Une personne possède 5 dés à 6 faces, tous de même poids et de même aspect. Trois de ces dés sont équilibrés, les deux autres sont pipés. Pour chacun de ces dés pipés, lorsqu'on les lance une fois, la probabilité d'obtenir un 1 vaut $\frac{1}{12}$, la probabilité d'obtenir un 6 vaut $\frac{1}{4}$ et les quatre autres faces sont équiprobables.

4.1 La personne prend un dé au hasard.

4.1.1 Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

4.1.2 La personne lance le dé. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne un 3 ?

4.2 La personne prend un dé au hasard et elle le lance vingt fois.

4.2.1 Si le dé est équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir exactement dix fois un 6 ?

4.2.2 Si elle obtient exactement dix fois un 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

4.3 La personne lance les 5 dés.

4.3.1 Quelle est la probabilité qu'elle obtienne au moins un 6 ?

4.3.2 Calculer la probabilité qu'elle obtienne trois 1 et deux 6 et exprimer la réponse sous forme de fraction irréductible.