Lycée cantonal | *Maturité 2008*
Porrentruy | *OS : Physique-Appl. des maths*

MATHEMATIQUES

Problème 1.

1.1. Etudier, puis représenter, (unité : 1 cm), la courbe c d'équations paramétriques :

$$x(t)=20(t^2-2t+1)\cdot \mathrm{e}^{-t} \qquad y(t)=(t-2)\cdot \mathrm{e}^{t}$$

1.2. Soient P et Q les points de la courbe c situés sur l'axe des x, respectivement sur l'axe des y.
Calculer l'aire du domaine limité par les segments OP, OQ et par l'arc de courbe PQ.

Problème 2.

On considère le triangle de sommets $A(21 ; 4 ; 18)$, $B(5 ; 12 ; 2)$, $C(1 ; 20 ; 10)$.

2.1. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

La rotation de ce triangle autour de l'axe AB engendre un cône γ.

2.2. Ecrire l'équation cartésienne du plan π contenant la base du cône γ.
2.3. Ecrire une représentation paramétrique de la droite t contenue dans le plan π et tangente au cône γ au point C.
2.4. Calculer le volume du cône γ.
2.5. Calculer l'aire latérale du cône γ.
Indication : considérer le développement du cône.
2.6. Ecrire l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au cône γ.

Problème 3.

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$H=\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

3.1.Calculer le déterminant de la matrice H.
3.2.Déterminer $Ker(h)$ et $Im(h)$.
3.3.Calculer les valeurs propres de h.
3.4.Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres.
3.5.Déterminer une base dans laquelle la matrice de h est diagonale et donner cette matrice.
3.6.Interpréter géométriquement l'application linéaire h.

☞ ***Tourner la page***

Problème 4.

Un billard comporte six trous permettant de gagner respectivement 100, 75, 75, 75, 50 et 50 points.
Une partie consiste à lancer successivement trois boules. Chaque boule lancée se place dans un trou et il ne peut pas y avoir plus d'une boule par trou. On suppose que, pour chaque boule, il y a équiprobabilité de se placer dans l'un des trous encore vide.
Chaque boule rapporte le nombre de points correspondant au trou qu'elle occupe.

4.1. Une personne joue une partie.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : les trois boules rapportent chacune 75 points
B : la somme des points obtenus vaut 225
C : une des boules rapporte 100 points sachant que la somme des points obtenus vaut 200.

4.2. Calculer la moyenne de la somme des points obtenus lors d'une partie.

4.3. Dix personnes jouent chacune une partie.
Calculer la probabilité des événements suivants :
D : quatre personnes obtiennent un total de 250 points
E : au moins une personne obtient un total de 250 points
F : cinq personnes obtiennent un total de 225 points et deux personnes un total de 250 points.

4.4. Un personne joue 1000 parties.
Calculer une valeur approximative de la probabilité que le nombre de parties donnant un total de 250 points soit compris entre 140 et 165 (bornes incluses).

Problème 5.

5.1. Soit la courbe d'équation $y = \sin(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Soient M un point d'abscisse t, $t \leqslant \frac{\pi}{2}$, appartenant à cette courbe et A sa projection orthogonale sur l'axe des x.
Soient P le point de la courbe ayant la même ordonnée que M et B sa projection orthogonale sur l'axe des x.
Pour quelle valeur de t l'aire du rectangle $ABPM$ est-elle maximale ? On donnera t à 0,05 près.
Calculer cette aire.

5.2. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre réel x fait correspondre le nombre complexe $z(x)=\sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+\mathrm{i}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.
a) Pour quelles valeurs de x, $z(x)$ est-il réel ?
b) Pour quelles valeurs de x, $z(x)$ est-il purement imaginaire ?
c) Calculer $(12-x)$ en fonction de $z(x)$.
d) Soit la fonction $m(x)=z(x)\cdot\overline{z(x)}$.
Calculer toutes les valeurs de x pour lesquelles la tangente au graphe de la fonction $m(x)$ est horizontale.

Temps à disposition : 4 heures.
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes.
Fascicule "Extraits des tables numériques" et machine à calculer non programmable et non graphique autorisés.

P1. 1. Domaine : $D_x = \mathbb{R}$, $D_y = \mathbb{R}$

Variation : $x'(t) = -20\cdot(t^2 - 4t + 3)\cdot e^{-t}$, $y'(t) = (t-1)\cdot e^t$

Points particuliers :
- point singulier : t=1, $S(0\,;\,-2{,}72)$, pente en S : 0,18
- point à tangente horizontale : néant
- point à tangente verticale : t=3, $V(3{,}98\,;\,20{,}08)$

Asymptotes : A.V. quand $t\to+\infty$, x=0; A.H. quand $t\to-\infty$, y=0 ; A.O. néant

Points d'intersection : a) avec l'axe des x : $P(2{,}71\,;\,0)$ b) avec l'axe des y : $S(0\,;\,-2{,}72)$

Graphique …

2. Aire du domaine = 5

P2. 1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

2. Plan π: $2x - y + 2z - 2 = 0$

3. Droite t : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 20 + 2t \\ z = 10 - t \end{cases}$

4. Volume : $1152\pi = 3619{,}11$

5. Aire latérale : $144\sqrt{5}\cdot\pi=1011{,}57$

6. Sphère : centre $\Omega(11\,;\,9\,;\,8)$ et rayon 15 , équation $(x-11)^2 + (y-9)^2 + (z-8)^2 = 225$

P3. 1. Dét(H) = 0

2. Ker(h) = droite $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ et $Im(h)$ = plan $2x + 2y + z = 0$

3. Valeurs propres de h : $\lambda_1=0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

4. Espaces propres : $E_0 = Ker(h)$ et $E_1 = Im(h)$

5. Dans la base $\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$, la matrice de h est $H'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6. h est la projection orthogonale sur le plan $2x + 2y + z = 0$

P4. a) $P(A)=\dfrac{1}{20}$, $P(B)=\dfrac{7}{20}$, $P(C)=\dfrac{1}{7}$

b) Moyenne : 212,5 points

c) $P(D) = 0{,}0401$, $P(E) = 0{,}803$, $P(F) = 0{,}0372$

d) Approximation : $P(140\le X\le 165) \cong \phi(1{,}37) - \phi(-0{,}93) \cong 0{,}738$

P5. 1. Aire du rectangle = $S(t) = (\pi-2t)\cdot\sin(t)$, $S(t)$ est maximale pour t=0,70 ; $S(0{,}70)$=1,12

2. a) $z(x)$ est réel pour $x=4k$, k entier (x multiple de 4)

b) $z(x)$ est purement imaginaire pour $x=3+6k$, k entier

c) $z(12-x) = z(x)$

d) $m'(x) = 0$ pour $x = -12k$ et pour $x = 1{,}2 + 2{,}4k$ (k entier)