Problème 1 (poids 3)

a) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x} y = \frac{5}{x^2}$, x étant strictement positif.

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \frac{5 \ln(x) + 1}{x}$

b) En tenant compte du domaine de définition, du zéro, des asymptotes verticale et horizontale, du point à tangente horizontale et du point d'inflexion, tracer le graphe de la fonction f .

c) Après analyse de la parité de la fonction g donnée par $g(x) = \frac{5 \ln(|x|) + 1}{x}$, tracer son graphe en tenant compte de celui de f .

d) Par changement de variable, trouver une primitive de la fonction f , puis l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) Déterminer un nombre a compris entre 0 et 1 tel que $\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

f) Déterminer des constantes A, B et C de sorte que la fonction

$H(x) = \frac{A \ln^2(x) + B \ln(x) + C}{x}$ soit une primitive de la fonction

$h(x) = f^2(x) = \frac{25 \ln^2(x) + 10 \ln(x) + 1}{x^2}$.

On considère la surface limitée par l'axe des x , le graphe de f et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = b$, b étant un nombre supérieur à 1. Lorsqu'elle tourne autour de l'axe des x cette surface engendre un corps de révolution.

g) Calculer le volume de ce corps dans le cas où $b = \mathrm{e}$.

h) Quelle est la valeur limite de ce volume lorsque b tend vers l'infini ?

Problème 2 (poids 3)

Dans l'espace, on donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par leurs composantes dans une base orthonormée standard $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$: $\vec{a}=\frac{3}{5}\vec{u}_2+\frac{4}{5}\vec{u}_3$ et $\vec{b}=\vec{u}_1$.

a) Trouver les composantes d'un vecteur $\vec{c}$ tel que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base orthonormée.

b) Exprimer les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ dans la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, on appelle f la symétrie axiale dont l'axe est donné par le vecteur $\vec{a}$.

c) Donner la matrice A' de f relativement à la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

d) Déterminer la matrice A de f relativement à la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.

Une transformation g des vecteurs de l'espace est donnée par sa matrice B relative à la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$: $B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & 9 & k\\ 0 & k & 16\end{pmatrix}$.

e) Pour quelle valeur du nombre k le vecteur $\vec{a}$ est-il un vecteur propre de g ? Donner alors la valeur propre correspondante.

Pour la suite, on pose $k=12$, donc $B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 12\\ 0 & 12 & 16\end{pmatrix}$.

f) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de g . En déduire une interprétation géométrique de la transformation g .

g) Sans calculer la matrice de $f\circ g$, donner les valeurs et vecteurs propres de cette dernière transformation.

Problème 3 (poids 2)

Partie 1

Comment faut-il choisir le nombre complexe a pour que $6\,\mathrm{i}$ soit un point fixe de la fonction complexe $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=a\,z+17-a^2$?

Partie 2

On appelle g la fonction complexe qui associe à chaque nombre complexe z non nul un nombre complexe w donné par l'expression $w=g(z)=\mathrm{i}-\dfrac{2}{z}$.

a) On écrit z sous la forme $z=x+\mathrm{i}\,y$, avec x et y réels. Exprimer alors les parties réelle u et imaginaire v de $w=g(z)=u+\mathrm{i}\,v$ en fonction de x et y.

b) Dans le plan de Gauss, quelle figure forment les nombres z dont l'image $g(z)$ est un nombre réel ? Dessiner cette figure.

c) Démontrer que l'image par g d'un point quelconque de la droite d'équation $y=1$ est un point du cercle de rayon 1 centré en $(0\,;2)$.

Problème 4 (poids 2)

On constitue un jeu de 10 cartes en prenant 4 valets, 3 dames, 2 rois et 1 as.

On extrait successivement 4 cartes de ce jeu en remettant systématiquement la carte tirée et en brassant le tas avant chaque nouveau tirage.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir, dans l'ordre, valet, dame, roi, puis as ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir 1 valet, 1 dame, 1 roi et 1 as sans tenir compte de l'ordre des tirages ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ?
d) Combien de fois faut-il tirer 4 cartes pour que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 98% ?

Pour faire 4 tirages avec remise, on doit payer 1 franc et l'on gagne un certain montant qui dépend du nombre d'as tirés.

Nombre d'as	4	3	2	1	0
Gain en francs	1000	50	5	1	0

e) Quelle est la probabilité de gagner 1000 francs, celle de gagner 50 francs, celle de gagner 5 francs et celle de gagner 1 franc ?
f) On a joué et obtenu un gain. Quelle est alors la probabilité d'avoir encaissé 1 franc ?
g) Le jeu est-il financièrement intéressant pour le joueur ? Justifier la réponse donnée.

Problème 1

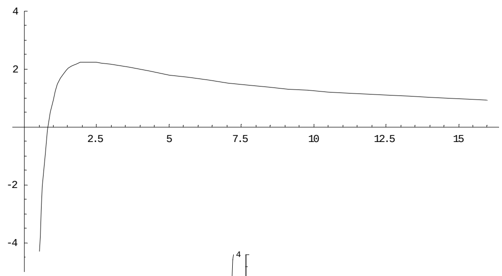
a) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{5}{x^2}$ on pose $y = uv,\ y' = u'v + uv'$

et on obtient $u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = \frac{5}{x^2}$ ou $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x} v\right) = \frac{5}{x^2}$

On pose $v' + \frac{1}{x} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ qui admet $v = \frac{1}{x}$ comme solution particulière

en remplaçant dans l'équation, on obtient : $u'\frac{1}{x} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow u' = \frac{5}{x} \Rightarrow u = 5\ln(x) + c$

La solution de l'équation différentielle est ainsi : $y = \frac{1}{x}(5\ln(x) + c) = \frac{5\ln(x) + c}{x}$



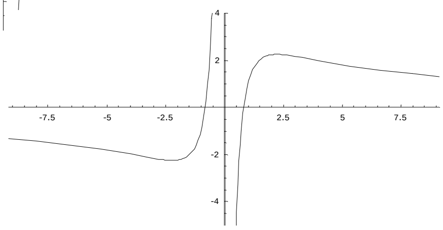
b) $f : x \mapsto y = \dfrac{5\ln(x) + 1}{x}$, $D = \mathbb{R}_+^*$, $I(e^{-0,2};0)$,

Ox est asymptote horizontale et

Oy asymptote verticale.

$f'(x) = \dfrac{4 - 5\ln(x)}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{10\ln(x) - 13}{x^3}$,

$M(e^{0.8};5e^{-0.8})$, $I(e^{1,3};7,5e^{-1,3})$



c) $g(-x) = -g(x)$, donc g est impaire.

d) $$\int_1^{e} \frac{5\ln(x) + 1}{x}\mathrm{d}x \underset{\substack{u=\ln(x)\\ du=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_0^1 (5u + 1)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{5}{2}u^2 + u\right]_0^1 = \frac{7}{2}$$

e) $$\int_a^{e} \frac{5\ln(x) + 1}{x}\mathrm{d}x \underset{\substack{u=\ln(x)\\ du=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_{\ln(a)}^1 (5u + 1)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{5}{2}u^2 + u\right]_{\ln(a)}^1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\ln^2(a) - \ln(a)$$

$$\int_a^{e} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow 5\ln^2(a) + 2\ln(a) - 7 = 0 \Rightarrow \ln(a) = 1 \text{ et } \ln(a) = -1,4 \Rightarrow a = e^{-1,4}$$

f) $$H(x) = \frac{A\ln^2(x) + B\ln(x) + C}{x}$$

$$H'(x) = \frac{(2A\ln(x)\frac{1}{x} + B\frac{1}{x})x - A\ln^2(x) - B\ln(x) - C}{x^2}$$
$$= \frac{-A\ln^2(x) + (2A - B)\ln(x) + (B - C)}{x^2} \Rightarrow A = -25,\ B = -60 \text{ et } C = -61$$

g) $$\pi\int_1^{e} f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{-25\ln^2(x) - 60\ln(x) - 61}{x}\right]_1^{e} = \pi\left(\frac{-146}{e} + 61\right) \cong 7,290\pi \cong 22,90$$

h) $$\lim_{b\to\infty} \pi\int_1^{b} f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-25\ln^2(b) - 60\ln(b) - 61}{b}\right) + 61 = 61\pi$$

Problème 2

a) $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{4}{5}\vec{u}_2 - \frac{3}{5}\vec{u}_3$.

b) $\vec{u}_1 = \vec{b}, \vec{u}_2 = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}, \vec{u}_3 = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{c}$.

c) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $A = P \cdot A' \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$.

e) $B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k \\ 0 & k & 16 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k \\ 0 & k & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{27}{125} + \frac{4k}{125} = \frac{3\lambda}{5} \\ \frac{64}{125} + \frac{3k}{125} = \frac{4\lambda}{5} \end{cases} \Rightarrow k = 12$ et $\lambda = 1$,

f) $B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$,

$\vec{u}_1$ *et* $\vec{a}$ sont des vecteurs 1-propres et $\vec{c}$ est un vecteur 0-propre.

g décrit une projection orthogonale sur le plan parallèle à $\vec{u}_1$ *et* $\vec{a}$.

g) Vecteurs 1-propres : $\vec{a}$; vecteur –1-propres : $\vec{u}_1$; vecteur 0-propres : $\vec{c}$.

Problème 3

Partie 1

$a6\mathrm{i}+17-a^2=6\mathrm{i} \Rightarrow a^2-6\mathrm{i}a+(-17+6\mathrm{i})=0$
$\Delta=32-24\mathrm{i}\,,\ w=x+y\mathrm{i}$

$$\begin{cases} x^2-y^2=32 & \Rightarrow\ x^2-\dfrac{144}{x^2}=32 \quad \Rightarrow\ x^4-32x-144=0\ \Rightarrow x=\pm 6\,,\ y=\mp 2 \\ 2xy=-24 & \Rightarrow\ y=\dfrac{-12}{x} \end{cases}$$

$$z_1=\frac{6\mathrm{i}+(6-2\mathrm{i})}{2}=3+2\mathrm{i},\ z_2=\frac{6\mathrm{i}-(6-2\mathrm{i})}{2}=-3+4\mathrm{i}$$

Partie 2

a) $w=\mathrm{i}-\dfrac{2}{z},\ u+v\mathrm{i}=\mathrm{i}-\dfrac{2}{x+y\mathrm{i}}=\dfrac{(x^2+y^2)\mathrm{i}-2(x-y\mathrm{i})}{x^2+y^2}=\dfrac{-2x}{x^2+y^2}+\dfrac{x^2+y^2+2y}{x^2+y^2}\mathrm{i}\,.$

b) $v=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2+2y=0\ \Rightarrow\ x^2+(y+1)^2-1=0\,,$
cercle de centre i et de rayon 1 sauf l'origine.

c) $u+v\mathrm{i}=\dfrac{-2x}{x^2+1^2}+\dfrac{x^2+1^2+2}{x^2+1^2}\mathrm{i}\ \Rightarrow\ u=\dfrac{-2x}{x^2+1}$ et $v=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$

$$u^2+(v-2)^2=\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-2\right)^2=\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{-x^2+1}{x^2+1}\right)^2=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^4+2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}=1$$

Problème 4

a) $P=\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{10}=0{,}0024\,.$

b) $P=\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{10}\cdot 4!=0{,}0576\,.$

c) $P=1-\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{9}{10}=0{,}3439\,.$

d) $1-\left(\dfrac{9^4}{10^4}\right)^n\geq 0{,}98\ \Rightarrow\left(\dfrac{9^4}{10^4}\right)^n<0{,}02\ \Rightarrow n\ln(\dfrac{9^4}{10^4})<\ln(0{,}02)\ \ \Rightarrow n\geq\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9^4)}=9{,}28\ \Rightarrow\ n=10$

e) $P(1000.–)=0{,}0001,\ P(50.–)=0{,}0036,\ \ P(5.–)=0{,}0486,\ \ P(1.–)=0{,}2916,\ \ P(0.–)=0{,}6561.$

f) $P=\dfrac{0{,}2916}{0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916}=\dfrac{0{,}2916}{0{,}3439}\cong 0{,}8479$

g) Gain moyen = $0{,}0001\cdot 1000+0{,}0036\cdot 50+0{,}0486\cdot 5+0{,}2916\cdot 1\cong 0{,}815<1$ pas intéressant !