Lycée cantonal
Porrentruy

Examen de Maturité 2008
Discipline fondamentale

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

Soient les points $A(4; -1; 3)$, $B(15; 9; 5)$ et $D(14; -11; -2)$.

1. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en A.
2. Calculer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un carré.
3. Établir une équation cartésienne du plan (ABD).
4. Écrire une représentation paramétrique de la droite n perpendiculaire au plan (ABD) et passant par le centre du carré $ABCD$.
5. Soit $S(\frac{33}{2}; -6; \frac{31}{2})$. Calculer la distance de S au plan (ABD).
6. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
7. Calculer l'angle que font l'arête SA et le plan (ABD).
8. Calculer l'aire de la face SAB.

Problème 2

Les diverses parties de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. Montrer que les courbes représentatives des fonctions

$$f(x) = (1 + x)e^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 + \sin(2x)$$

   sont tangentes au point d'abscisse $x = 0$.

2. (a) Pour quelle valeur de n a-t-on $\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{9}$?

   (b) Calculer $\int (1 + x)\ln(x)\,dx$.

3. Vérifier que les courbes d'équations $y = e^{-x+2}$ et $y = \frac{1}{2}x$ se coupent au point d'abscisse $x = 2$, puis calculer l'aire bornée délimitée par ces deux courbes et l'axe Oy.

4. Soit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

   On appelle P un point quelconque d'ordonnée positive de la parabole et C sa projection orthogonale sur l'axe Ox. On considère aussi les points d'intersection A et B de la parabole avec l'axe des x tels que A est à gauche de B.

   Quelles sont les coordonnées du point P pour lesquelles l'aire du triangle PAC est maximale ?

(suite au verso)

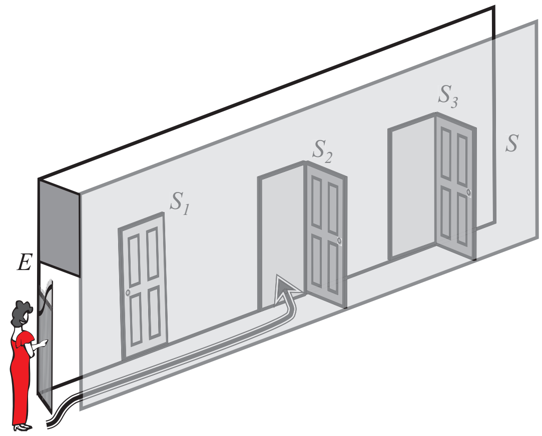
Problème 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^3 - 1}$.

1. Étudier la fonction f. Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :
$$f''(x) = \frac{12\,x^2\,(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$
2. Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion.
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Problème 4

Pour sortir d'une maison hantée, Maria doit passer par un étrange couloir le long duquel se trouvent trois portes fermées, notées S_1, S_2 et S_3. On accède à ce couloir par le portail E. Au moment où on ouvre ce portail, chacune des trois portes a une chance sur deux de s'ouvrir par enchantement. L'étroitesse du couloir oblige Maria à sortir du couloir par la première porte ouverte qu'elle rencontre ; si les trois portes sont fermées, elle doit sortir du couloir par l'issue notée S. Quand Maria a quitté le couloir, le portail et toutes les portes ouvertes se referment.



1. Maria ouvre le portail.
   (a) Calculer la probabilité que Maria soit confrontée à la configuration :
   $$S_1 \text{ est fermée} \qquad S_2 \text{ est fermée} \qquad S_3 \text{ est ouverte}$$
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois portes soient ouvertes.
   (c) On note p_i la probabilité de sortir du couloir par la porte S_i. Calculer p_1, p_2 et p_3.
   (d) Sachant que S_2 est ouverte, calculer la probabilité que Maria sorte du couloir par la porte S_3.
2. Lorsque Maria passe par les portes S_1 ou S_3, son chemin la ramène au portail E. En revanche, si elle passe par S_2 ou par S, elle sort définitivement de la maison hantée.
   (e) Quelle est la probabilité que Maria sorte de la maison en ne passant qu'une seule fois dans le couloir ?
   (f) Quelle est la probabilité que Maria passe au plus trois fois dans le couloir avant de sortir de la maison ?
   (g) Sachant qu'au deuxième passage Maria a franchi la porte S_1, calculer la probabilité qu'elle sorte de la maison au quatrième passage.
3. Cette fois, 8 personnes franchissent successivement le portail E.

   Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces personnes passent par S_2 à leur premier passage ?
4. On suppose maintenant que n personnes franchissent **une seule fois** chacune le portail E.

   Calculer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure à 95% ?

Problème 1

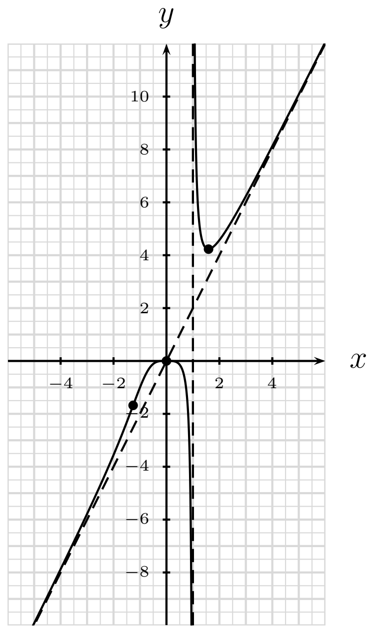
1. Il est rectangle en A car $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$. et il est isocèle en A car $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$.
2. On trouve $C(25; -1; 0)$.
3. On trouve $(ABD) : 2x - 5y + 14z = 55$.
4. la description paramétrique de la droite est $n : \begin{cases} x = 14.5 + 2\lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 1.5 + 14\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
5. La distance vaut 15.
6. Le volume vaut 1125.
7. L'angle cherché est $\cong 54.736°$.
8. L'aire du triangle SAB vaut $\cong 125.779$.

Problème 2

1. Il suffit de vérifier que $f(0) = g(0)$ et que $f'(0) = g'(0)$. Avec un poil plus de calculs, on a l'équation de cette tangente : $y = 1 + 2x$.
2. (a) $n = 4$ (en résolvant une équation et non par tâtonnement !)
   (b) On intègre par parties : $\int (1+x)\ln(x)\,dx = (x + \frac{1}{2}x^2)\ln(x) - (x + \frac{1}{4}x^2) + C$
3. Notons $f(x) = e^{-x+2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x$.
   D'abord, on doit vérifier que $f(2) = g(2)$. Puis à l'aide d'une esquisse de f et de g, on s'aperçoit qu'à gauche du point d'intersection, l'exponentielle est au-dessus de la droite. L'aire cherchée est ainsi $\int_0^2 (e^{-x+2} - \frac{1}{2}x)\,dx \cong 5.389$.
4. L'aire est donnée par $A(x) = \frac{1}{4}(6x^2 - x^3)$; le domaine d'intérêt est $D = [0, 6]$.
   Les coordonnées du point P où se trouve le triangle d'aire maximale sont $P(4; 4)$.

Problème 3

1. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire.
   Le bord de D est $\partial D = \{1, \pm\infty\}$.
   Comportement local : asymptote verticale en $x = 1$.
   Comportement en $\pm\infty$: asymptote oblique $y = 2x$.
   $$f'(x) = \frac{2x^3\,(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2\,(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$$
   On a un zéro et un maximum local en $(0; 0)$, un minimum local en $\cong (1.59; 4.23)$ et un point d'inflexion en $\cong (-1.26; -1.68)$.
2. La pente au point d'inflexion est $\frac{8}{3} \cong 2.67$.
3. Le graphe de f se trouve ci-contre.



Problème 4

1.a) 0.125 b) 0.375 c) $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.125$ d) 0

2. e) 0.375 f) $\frac{387}{512}$ g) $\frac{15}{64}$ 3. $\cong 0.003845$ 4. Au minimum 7 personnes.