Collège Madame de Staël **Mai-juin 2008**

EXAMEN DE MATURITE

Discipline : mathématiques **Maîtres :**

Date : 2 juin 2008 **Cours : G4.MA1**

Durée : 240 minutes

Matériel autorisé : - Tables numériques CRM fournies par l'école
- Calculatrice personnelle non programmable

NOM : .... PRENOM : .... GROUPE : ....

Prière de rendre la feuille d'énoncé à la fin de l'épreuve.
Tous les résultats doivent être justifiés par un calcul ou un raisonnement complet.

L'examen comprend 8 questions.

Question 1 *(14 points)*

Etudier la fonction réelle f définie par $f(x) = \dfrac{5-x^2}{x-3}$.

La représentation graphique sera faite sur une page entière. L'étude de la courbure (dérivée seconde) n'est pas exigée.

Question 2 *(9 points)*

a) Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = e^x \cdot (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(\frac{x}{2})dx$.

c) Vérifier que $\dfrac{5x+13}{(x+3)^2} = \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{2}{(x+3)^2}$.

Utiliser le résultat pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{5x+13}{x^2+6x+9}dx$.

Question 3 *(7 points)*

Soient f et g les deux fonctions réelles données par $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ et $g(x) = x + 1$

a) Calculer l'aire du domaine limité par les graphiques de f et de g entre les deux points où les graphiques de ces fonctions se croisent.

b) Calculer le volume du corps obtenu par la rotation autour de l'axe des x du domaine décrit en b).

Question 4 *(13 points)*

Une urne contient 13 boules noires et 7 boules blanches.

a) On tire au hasard successivement et sans remise 3 boules dans l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir plus de boules blanches que de boules noires.

b) On organise un jeu d'argent en tirant au hasard successivement et sans remise 2 boules dans l'urne.
Si on a plus de boules blanches que de boules noires, on gagne 60 francs ; si on a autant de boules blanches que de boules noires, on gagne 10 francs ; sinon on perd 20 francs.
Ce jeu est-il favorable au joueur ?

c) On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, et cela 8 fois de suite. Calculer la probabilité d'avoir 4 ou 5 fois une boule noire.

d) On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, et cela 800 fois de suite.
Calculer la probabilité d'avoir entre 400 (compris) et 500 (compris) fois une boule noire.

Question 5 *(7 points)*

On dispose de deux dés un peu particuliers, puisque
le premier a six faces numérotées : -1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1
et le second a huit faces numérotées : -1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 3 .

On jette ces deux dés et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque jet le produit des points obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Sachant que le produit vaut 1, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 1 sur chaque dé ?

Question 6 *(7 points)*

Un club d'athlétisme comprend 500 membres. La taille de cette population d'athlètes est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 182 cm. De plus, 420 athlètes de cette population mesurent plus de 175 cm.

a) Déterminer la variance de cette population d'athlètes.

b) Une épreuve sportive réunit les 500 athlètes ; déterminer combien d'athlètes de ce groupe mesurent plus de 194 cm.

Question 7 *(15 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O;i;j;k), on considère les trois points A(1 ; 2 ; 0), B(0 ; 1 ; 1) et C(1 ; 0 ; -2) .

a) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABCE forme un parallélogramme.

b) Calculer l'angle en A du triangle ABC.

c) Déterminer le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

d) Déterminer les coordonnées du point D, si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

e) Calculer l'aire du triangle ABC .

f) Calculer le volume du tétraèdre ABCD .

RESOUDRE UNE QUESTION PARMI LES DEUX SUIVANTES.

Question 8A *(8 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O;i;j;k), on considère les point A(2;2;1) , B(10;0;11).

a) Déterminer une représentation paramétrique (équations paramétriques) de la droite d qui passe par A et par B.

b) On donne le plan π défini par l'équation $2x+2y-z-3=0$; déterminer l'intersection de la droite d et du plan π.

c) Calculer la distance entre point A et le plan π .

d) Déterminer une représentation paramétrique (équations paramétriques) d'une droite p qui est strictement parallèle au plan π et qui passe par l'origine du repère.

Question 8B *(8 points)*

Dans un pays imaginaire, une personne possède un lingot de métal précieux et un véhicule. Au 1er janvier de l'an 2000, la valeur du véhicule était cinq fois celle du lingot.
Dans ce pays la valeur du lingot augmente de 9% par an et la valeur du véhicule diminue de 10% par an.

a) Déterminer à quel moment (année et mois) le lingot et le véhicule auront la même valeur.

b) Exprimer la valeur du lingot à ce moment en pour cent (%) de sa valeur au 1er janvier de l'an 2000 .

FIN DE L'EPREUVE