# CONJUGUÉ D'UN POINT PAR RAPPORT À UN TRIANGLE

*Jean Luc Bovet, Auvernier*

L'article de Monsieur Jean Piquerez (Bulletin de la SSPMP No 86), consacré aux symédianes me paraît appeler une généralisation. En effet, si les médianes (concourantes) ont des symétriques concourantes par rapport aux bissectrices, il en va de même pour tout triplet de droites concourantes issues des sommets d'un triangle.

La chose n'est pas tout à fait évidente. Je me propose de la démontrer.

Il est clair que cette propriété va constituer une application du plan (ou d'une partie de celui-ci) vers lui-même : au point de concours $P$ des trois droites, on fera correspondre le point de concours $P'$ de leurs symétriques par rapport aux bissectrices. La symétrie axiale étant involutive, cette application l'est aussi. J'appellerai $P'$ conjugué de $P$ par rapport au triangle. Il s'agit je pense d'une application peu connue. Je n'ai pas la prétention d'en faire une véritable étude. Le logiciel Cabri est merveilleusement adapté pour donner une illustration de cette application. Cet article est donc accompagné d'un certain nombre de figures réalisées avec Cabri que le lecteur pourra télécharger à l'adresse [www.sspmp.ch/crm/telecharger](www.sspmp.ch/crm/telecharger)

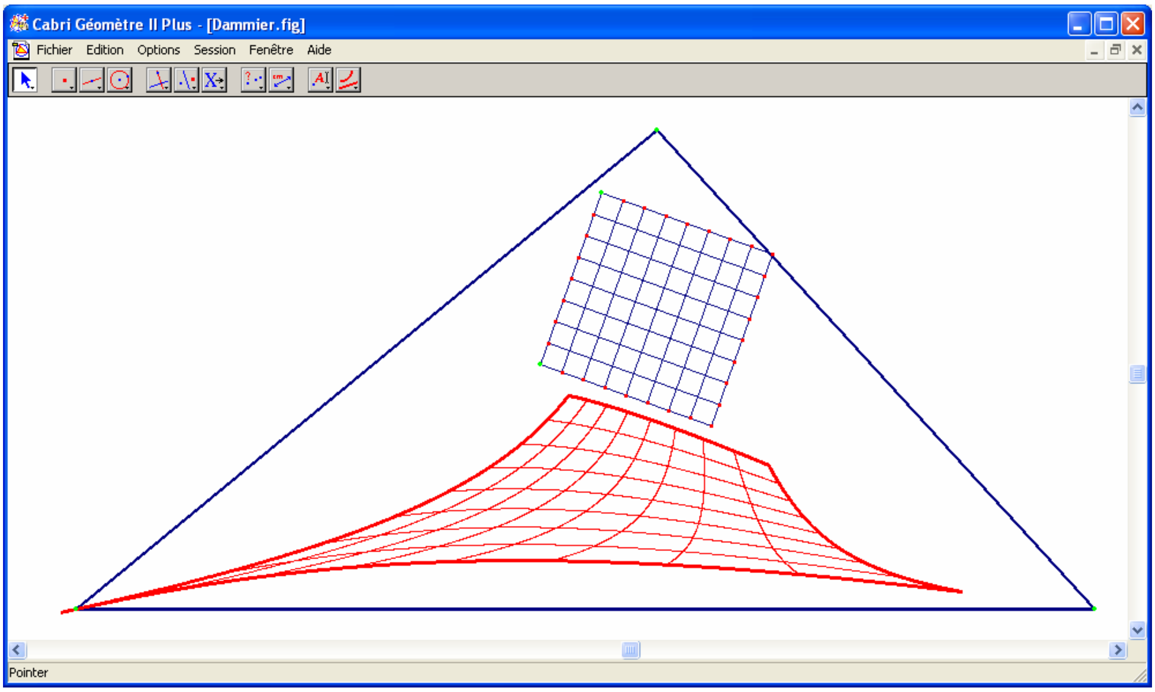



*Fig. 1 Conjugué d'un damier par rapport à un triangle*

Commençons par la démonstration.

---

Je rappelle tout d'abord la notion de rapport de section.

$A$, $B$, $C$ étant trois points alignés, $(ABC)$ est le réel $k$ tel que $\overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{CB}$ .
L'application qui à tout point $C$ de la droite $AB$ (sauf $B$) fait correspondre $k$ est une bijection de $d - B$ vers $\mathbb{R} - \{1\}$. Notons que si $(ABC) = 1$, $C$ est à l'infini.

Propriété importante: Si $(ABC) = (ABD)$ alors $C$ et $D$ sont confondus.
Démonstration.

$A(a;0)$ etc $(ABC) = (a - c) / (b - c)$ et $(ABD) = (a - d) / (\mathrm{b} - d)$
$(ABC) = (ABD) \Rightarrow ab - ad - bc + cd = ab - bd - ac + cd$
$\Rightarrow d(b - a) = c(b - a) \Rightarrow d = c$ puisque $a \neq b$.

---

Je rappelle la notion de birapport, avec quelques-unes de ses propriétés.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA}$$

**Propriété 1** :
Si $(ABCD) = \lambda$ alors $(BACD) = 1/\lambda$ (Permutation des points 1 et 2)

**Propriété 2** :
Si $(ABCD) = \lambda$ alors $(ABDC) = 1/\lambda$ (Permutation des points 3 et 4)

**Propriété 3** :
Si $(ABCD) = \lambda$ alors $(\mathrm{ACBD}) = 1 - \lambda$ (Permutation des points 2 et 3)

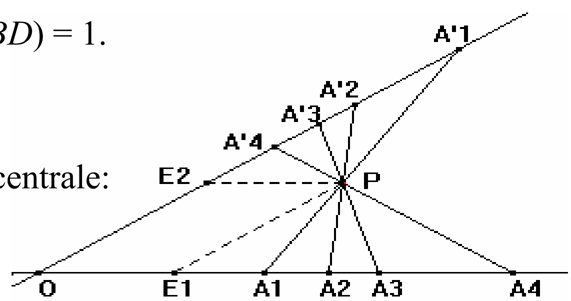
Les propriétés 1 et 2 sont évidentes.
Démonstration de la propriété 3:

$$(ACBD) = \frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA} = \frac{(BC + CA) \cdot (DA + AC)}{BC \cdot DA} =$$
$$= \frac{BC \cdot DA}{BC \cdot DA} + \frac{CA \cdot (CB + DA + AC)}{BC \cdot DA} = 1 + \frac{CA \cdot DB}{BC \cdot DA} = 1 - \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} = 1 - \lambda$$

**Propriété 4** :
Si D est à l'infini, $(ABCD) = (ABC)$ puisque $(ABD) = 1$.

**Propriété 5** :
Le birapport est invariant lors d'une projection centrale:
Affirmation:

$(A_1\, A_2\, A_3\, A_4) = (A'_1\, A'_2\, A'_3\, A'_4)$



Démonstration:

Choisissons comme base $OE_1E_2$.

$A_i(x_i;0)$, $A'_i(0;y_i)$ et $P(1;1)$

Droite $A_iP$: $x - (1 - x_i) \cdot y = x_i$

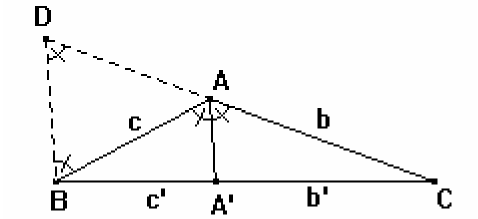
D'où $y_i = \dfrac{x_i}{x_i - 1} = 1 + \dfrac{1}{x_i - 1}$

On calcule $y_j - y_i = \dfrac{x_i - x_j}{(x_j - 1)\cdot(x_i - 1)}$

$$(A'_1\ A'_2\ A'_3\ A'_4) = \frac{A'_3A'_1}{A'_3A'_2}\cdot\frac{A'_4A'_2}{A'_4A'_1} = \frac{(y_3 - y_1)\cdot(y_4 - y_2)}{(y_2 - y_3)\cdot(y_1 - y_4)} = \frac{(x_1 - x_3)\cdot(x_2 - x_4)}{(x_3 - x_2)\cdot(x_4 - x_1)}$$
$$= \frac{(x_3 - x_1)\cdot(x_4 - x_2)}{(x_2 - x_3)\cdot(x_1 - x_4)} = (A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$$

---

Je rappelle le fait que la bissectrice issue de *A* détermine sur *BC* deux segments *b*' et *c*' proportionnels aux côtés *b* et *c* du triangle. (Théorème 1)

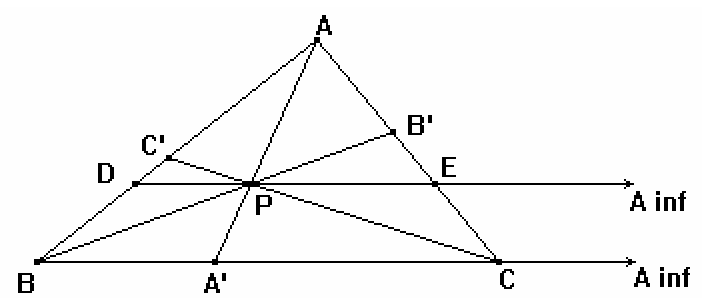



*BD* // *A'A* , *ABD* est isocèle (par égalité des angles) donc *DA* = *c*.

Le théorème de Thalès entraîne que $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$

---

Je rappelle enfin le théorème de Ceva: (Théorème 2)




Soit *ABC* un triangle, *P* un point quelconque, non situé sur les droites portant les côtés, ni sur les parallèles aux côtés passant par le sommet opposé.

*AP* coupe *BC* en *A*', *BP* coupe *CA* en *B*', *CP* coupe *AB* en *C*'.

Alors $(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1$ (Théorème 2)

La réciproque (Théorème 3) est vraie:

Si $(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1$ alors *AA'*, *BB'* et *CC'* sont concourantes.

Démonstration du théorème 2:

$\underline{\lambda = (BCA')} = (BCA'A_{\text{inf}})$

Projetons ces 4 points à partir de $P$ sur $AB$ :

$(BC'AD) = \lambda \Rightarrow (BAC'D) = 1 - \lambda \Rightarrow \ (ABC'D) = \underline{\dfrac{1}{1-\lambda} = \dfrac{(ABC')}{(ABD)}}$

Projetons ces 4 points à partir de $P$ sur $AC$ :

$(BC'AE) = \lambda \Rightarrow (CB'AE) = 1 - \lambda \Rightarrow$

$(CB'AE) = \dfrac{1}{\lambda} \Rightarrow (CAB'E) = 1 - \dfrac{1}{\lambda} = \underline{\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} = \dfrac{(CAB')}{(CAE)}}$

D'autre part, d'après le théorème de Thalès,

$\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC}$

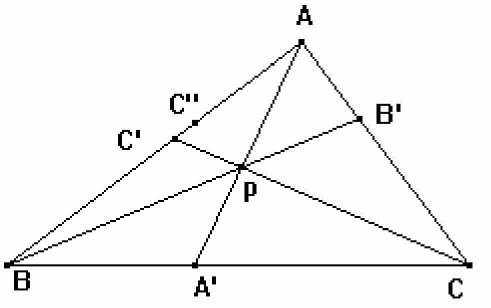
Or $\dfrac{DA}{DB} = (ABC)$ et $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{1}{(CAE)}$. D'où $(ABD) \cdot (CAE) = 1$

Multiplions entre elles les égalités soulignées:

Il vient $(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1$

Démonstration du théorème 3:

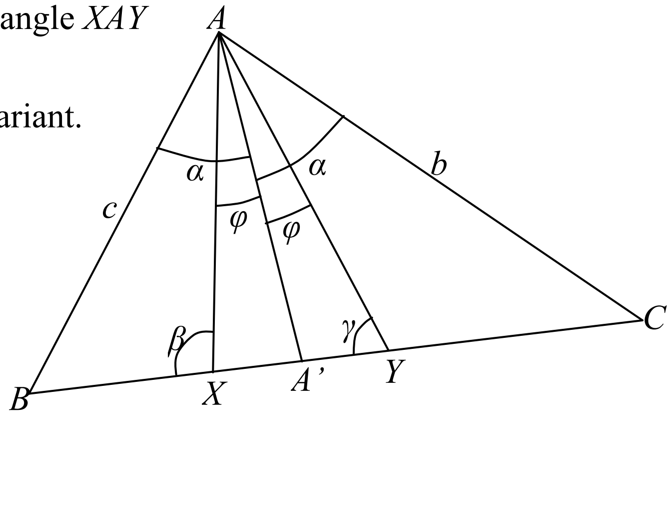
$(ABC'') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1$ (Hypothèse) et
$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1$ (Ceva)
entraînent que $(ABC'') = (ABC')$, puis que $C'' = C'$,
enfin que $AA'$, $BB'$ et $CC''$ concourent.




---

Voici maintenant le théorème 4.

$AA'$ : bissectrice de l'angle $BAC$ et de l'angle $XAY$




Affirmation :

Quel que soit $\varphi$, $(BCX) \cdot (BCY)$ est invariant.

Démonstration :

Le théorème du sinus entraîne

$$\frac{XB}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{c}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{XC}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{b}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$(BCX) = \frac{XB}{XC} = \frac{c \cdot \sin(\alpha-\varphi) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\beta) \cdot b \cdot \sin(\alpha+\varphi)}$$

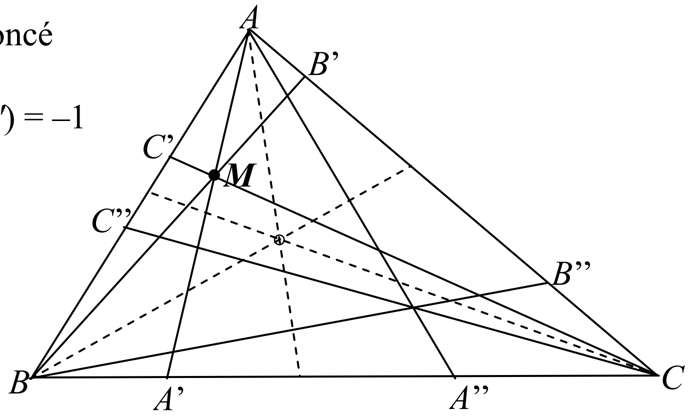
$$\frac{YB}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \frac{YC}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{b}{\sin(\pi-\gamma)} = \frac{b}{\sin(\gamma)}$$

$$(BCY) = \frac{YB}{YC} = \frac{c \cdot \sin(\alpha+\varphi) \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\gamma) \cdot b \cdot \sin\alpha-\varphi)}$$

Donc $(BCX)\cdot(BCY) = \left(\dfrac{c}{b}\right)^2$

Cette valeur vaut $(BCA')^2$ puisque c'est la situation quand $\varphi = 0$. Elle est bien en conformité avec ce qu'affirme le théorème 1.

Passons maintenant au théorème annoncé




On a (Ceva) $(ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB') = -1$

On a (Th 4) $(ABC')\cdot(ABC'') = (b/a)^2$

$$(BCA')\cdot(BCA'') = (c/b)^2$$

$$(CAB')\cdot(CAB'') = (a/c)^2$$

Multiplions ces trois égalités:

$(-1)\cdot(ABC'')\cdot(BCA'')\cdot(CAB'') = 1.$ Donc $(ABC'')\cdot(BCA'')\cdot(CAB'') = -1$

Donc en vertu de la réciproque de Ceva, $AA''$, $BB''$ et $CC''$ sont concourantes.

**Exemple de figures réalisées avec Cabri**

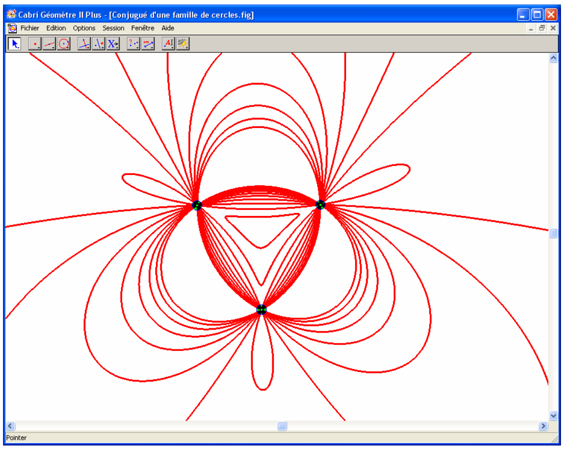


Image d'une famille de cercles concentriques

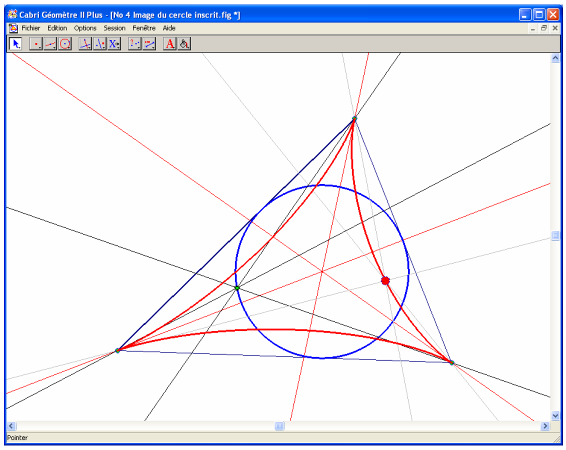


Image du cercle inscrit

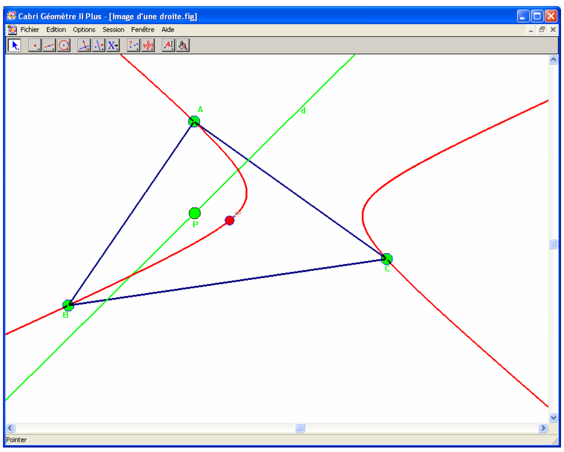


Image d'une droite

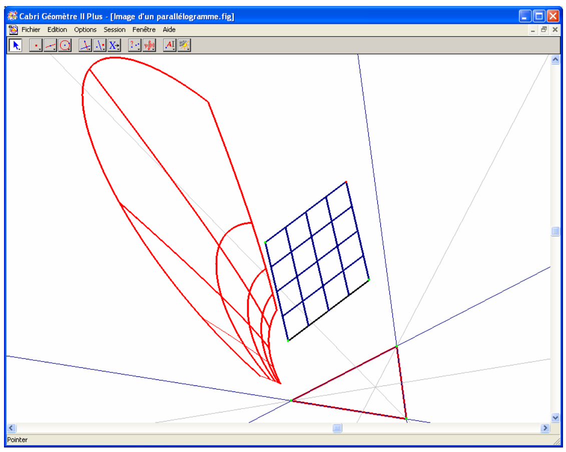


Image d'un parallélogramme

**Remarques**

En utilisant les figures réalisées avec Cabri, on peut constater que

- les points situés sur les droites portant les côtés ont tous la même image: le sommet opposé;
- les sommets n'ont (involution) pas d'image;
- l'image d'une droite est une conique;
- l’image du cercle inscrit est une deltoïde si le triangle est équilatéral; (?)
- l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit se correspondent;
- les points du cercle circonscrit ont leur image à l'infini.

PS. Les lecteurs ayant suivi le cours de la CRM de l'automne 2004 peuvent essayer de construire le conjugué d'une image par rapport à un triangle isocèle rectangle avec Mathematica.