Aspects géométriques du *GPS*

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

I. Introduction

Le système *GPS* (*G*lobal *P*ositioning *S*ystem) a été développé dans les années 80 par le département américain de la défense. Actuellement, l'éventail des utilisateurs civils ne cesse de croître, tant pour des usages professionnels (étude des migrations animales, gestion de la flotte des compa-gnies de transport,...) que privés (assistance à la conduite, aide à la randonnée,...).

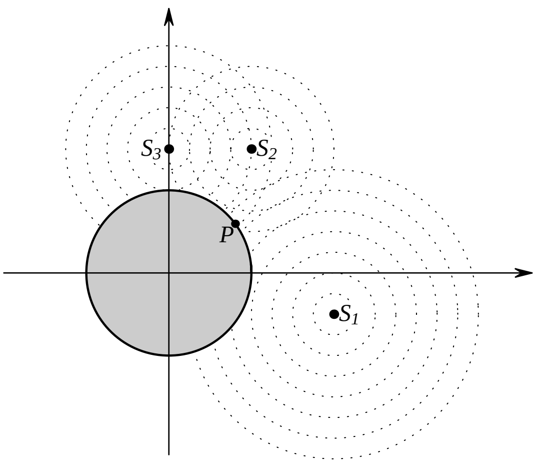
La mise en oeuvre du système nécessite une constellation de satellites (actuellement 24, répartis sur 6 orbites) qui émettent en permanence des signaux radio. Le nombre d'utilisateurs n'est pas limité; il suffit d'être en possession d'un récepteur pour connaître la longitude, la latitude et l'altitude de sa position.

A l'aide d'un modèle simple, nous abordons quelques concepts à la base du fonctionnement du système et nous saisissons l'occasion pour faire des mathématiques exploitables au lycée.

II. Un modèle 2D

II-1. Principe de triangulation

Supposons que le niveau de la mer soit un cercle centré à l'origine d'un repère orthonormé. Les satellites sont des points S_i qui émettent des trains de signaux et nous nous trouvons sur Terre en un point P muni d'un récepteur *GPS*.



Chaque signal est porteur de l'heure t_i à laquelle il a été diffusé et de la position $S_i(x_i, y_i)$ du satellite au moment de son émission. Si le récepteur est capable de calculer les distances $d_i = \delta(P, S_i)$ qui le séparent des satellites dont il a capté les signaux, le calcul de notre position est un problème d'intersection de lieux géométriques, ici des cercles d'équations

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = d_i^2 .$$

Nous supposons que les signaux émis se déplacent à la vitesse de la lumière. En fixant le rayon de la Terre $R_{\text{Terre}} = 1$ ($\simeq 6371$ km), le niveau de la mer admet l'équation $x^2 + y^2 = 1$, et la vitesse de la lumière exprimée en rayons terrestres par milliseconde prend la valeur $c = 0.047$ ($\simeq \frac{300000}{6371 \cdot 1000}$).

II-2. Premiers calculs

Commençons par considérer deux satellites. A l'heure $t = 53.495$ ms, indiquée par l'horloge interne de notre récepteur, deux signaux contenant les informations ci-dessous sont reçus.

Position du satellite	Heure d' émission
S_1 (2, −0.5)	$t_1 = 18.860$ ms
S_2 (1, 1.5)	$t_2 = 33.880$ ms

Les distances $d_i = \delta(P, S_i)$ sont calculées à l'aide de la relation classique $d_i = c \cdot \Delta t_i$, où $\Delta t_i = t - t_i$. Nous obtenons

$$\Delta t_1 = 53.495 - 18.860 = 34.635 \text{ ms} \ \text{ et } \ \Delta t_2 = 53.495 - 33.880 = 19.615 \text{ ms}.$$

Notre position appartient aux deux cercles d'équations

$$(x-2)^2 + (y+0.5)^2 = 0.047^2 \cdot 34.635^2$$
$$(x-1)^2 + (y-1.5)^2 = 0.047^2 \cdot 19.615^2.$$

Il s'agit d'un système non linéaire dont la résolution (à l'aide d'un outil informatique) donne

$$P_1(1.83993,\ 1.11996)$$
$$P_2(0.80008,\ 0.60003).$$

Le point P_1 se trouve à une distance de $\sqrt{1.83993^2 + 1.11996^2} \simeq \sqrt{4.63965} \simeq 2.15398\ R_{\text{Terre}}$ du centre de la Terre, soit à une altitude de $(2.15398 - 1) \cdot 6371 \simeq 7352.007$ km. Ce point est très éloigné de la surface terrestre.

Le point P_2 se trouve à une distance de $\sqrt{0.80008^2 + 0.60003^2} \simeq \sqrt{1.00016} \simeq 1.00008\ R_{\text{Terre}}$ du centre de la Terre, soit à une altitude de $(1.00008 - 1) \cdot 6371 \simeq 0.510$ km. Ce point donne notre position.

II-3. Un troisième satellite confirme-t-il notre résultat ?

Supposons qu'à la même heure $t = 53.495$ ms, nous ayons reçu d'un troisième satellite les informations $t_3 = 27.875$ ms et S_3 (0, 1.5). Nous disposons alors du système

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+0.5)^2 &= 0.047^2 \cdot 34.635^2 \\ (x-1)^2 + (y-1.5)^2 &= 0.047^2 \cdot 19.615^2 \\ x^2 + (y-1.5)^2 &= 0.047^2 \cdot 25.620^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Notre logiciel de calcul indique que le système est impossible, ces trois cercles n'ont donc pas de point commun. Résolvons les trois sytèmes obtenus en prenant les équations deux par deux. Nous trouvons successivement

$$\begin{array}{l} (0.80008,\ 0.60003) \text{ et } (1.83993,\ 1.11996) \\ (0.80040,\ 0.60038) \text{ et } (0.89962,\ 0.69960) \\ (0.80002,\ 0.60005) \text{ et } (0.80002,\ 2.39995). \end{array}$$

Dans chaque cas, la première solution énumérée est plausible, mais ces trois possibilités nous positionnent à des endroits fort différents. Calculons par exemple les altitudes respectives de ces trois points : $0.510\,\text{km}$, $3.491\,\text{km}$ et $0.293\,\text{km}$.

Le problème réside dans la synchronisation des horloges. Les satellites sont équipés d'horloges atomiques, mais un récepteur portatif ne possède pas ce luxe. Un décalage existe donc entre l'heure indiquée par les horloges des satellites, qui elles sont synchrones, et l'heure de l'horloge dont est équipé notre récepteur. Par conséquent, les temps de parcours $\Delta t_i = t - t_i$ ne sont pas corrects. Il s'ensuit une erreur sur le calcul des distances $d_i = c \cdot \Delta t_i$, et notre position ne se situe pas sur les cercles $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = d_i^{\,2}$.

II-4. De nouveaux lieux géométriques

Introduisons une nouvelle variable τ qui représente le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites. Les distances correctes sont alors données par

$$d_i = c \cdot (\Delta t_i - \tau) = c \cdot ((t - t_i) - \tau) = c\,t - c\,t_i - c\,\tau\,, \quad \forall\, i\,.$$

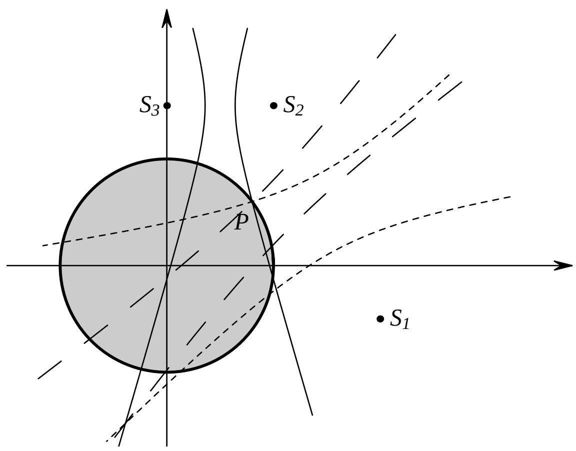
Le récepteur est en mesure de calculer la différence entre les distances qui le séparent de deux satellites S_p et S_q. Ces différences $d_{p,q} = \mid d_q - d_p \mid$ sont indépendantes du décalage τ. En effet

$$d_{p,q} = \mid c\,t - c\,t_q - c\,\tau - (c\,t - c\,t_p - c\,\tau) \mid = \mid c \cdot (t_p - t_q) \mid = \mathit{constante}\,.$$

Par conséquent, nous obtenons de nouveaux lieux géométriques pour localiser notre position P. Ce sont des hyperboles de foyers S_p et S_q déterminées par

$$\mid \delta(P, S_q) - \delta(P, S_p) \mid = d_{p,q}\,.$$

Dans notre exemple, nous obtenons la situation suivante



Les intersections communes sont les deux points

$$(0.80003,\, 0.60002) \text{ et } (-0.38784,\, -1.47950)$$

d'altitudes respectives $0.229\,\text{km}$ et $3373.382\,\text{km}$.

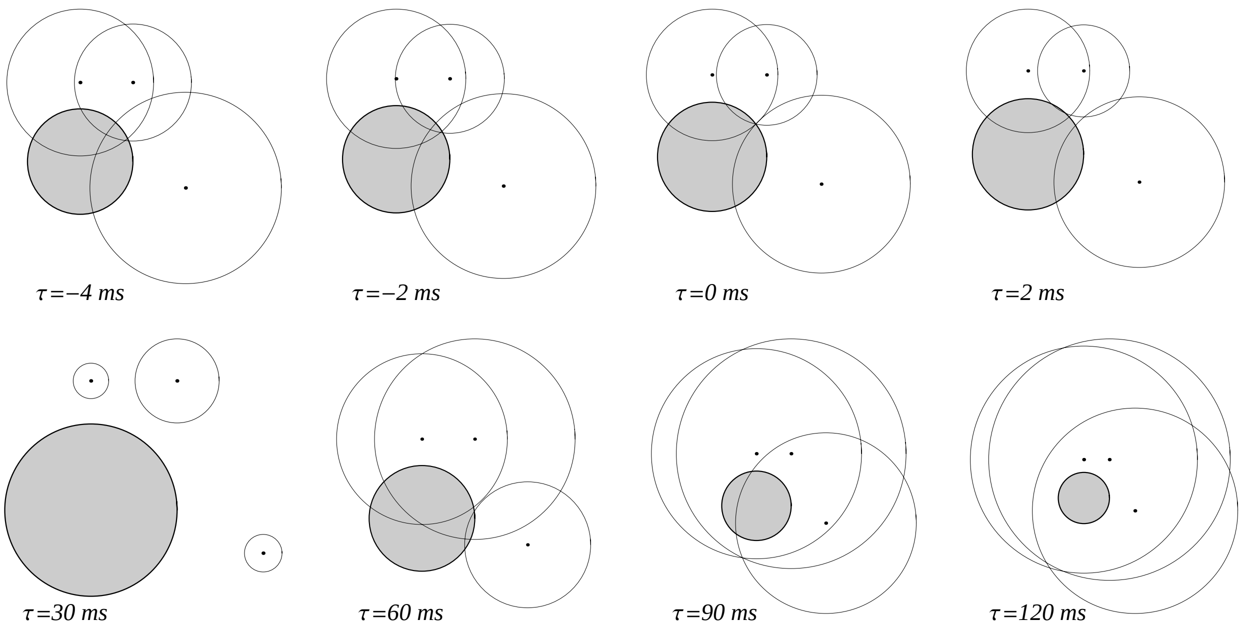
Notre position est $(0.80003,\ 0.60002)$. L'autre point est trop éloigné.

II-5. Revenons au système d'équations (1)

En prenant en considération le décalage τ, le système (1) se réécrit

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+0.5)^2 &= 0.047^2 \cdot (34.635-\tau)^2\\ (x-1)^2 + (y-1.5)^2 &= 0.047^2 \cdot (19.615-\tau)^2\\ x^2 + (y-1.5)^2 &= 0.047^2 \cdot (25.620-\tau)^2.\end{aligned} \qquad (2)$$

Dans le plan, si trois cercles dont les centres ne sont pas colinéaires ont un point commun, alors ce point est unique. Compte tenu de ce résultat, nous cherchons les valeurs de τ pour que les trois cercles alors définis aient un point commun. La figure suivante illustre l'effet du décalage τ



On obtient un point commun pour $\tau_1 \simeq 0\,\text{ms}$ et $\tau_2 \simeq 90\,\text{ms}$.

La résolution du système (2) fournit les solutions

$$\begin{aligned}x_1 = 0.80003,\ y_1 = 0.60002,\ \tau_1 = -0.00057\,\text{ms}\\ x_2 = -0.38784,\ y_2 = -1.47950,\ \tau_2 = 89.54850\,\text{ms}\end{aligned}$$

On retrouve la solution (0.80003,0.60002), et en prime nous pouvons déduire l'heure exacte à l'aide du décalage $\tau_1 = -0.00057\,\text{ms}$.

Notons que ce décalage de 0.57 millième de milliseconde fausse les distances de plusieurs dizaines de mètres dans le meilleur des cas.

II-6. Conclusion

Dans le plan, trois satellites permettent de localiser un point de la Terre et d'éliminer les erreurs d'horloge dans la plupart des cas. Des positions particulières des satellites dont les informations sont utilisées par le récepteur peuvent mener à deux solutions possibles. Il faut alors faire appel à un nouveau satellite.

Un récepteur *GPS* est un merveilleux calculateur, et les mathématiques jouent un rôle essentiel dans la réalisation de ce système de positionnement.

III. Commentaires

La généralisation en trois dimensions des questions traitées ci-dessus se fait sans problème. Dans l'espace, les cercles deviennent des sphères, les hyperboles des hyperboloïdes, et si quatre sphères dont les centres ne sont pas coplanaires ont un point commun, alors ce point est unique. Ainsi, il faut un minimum de quatre satellites pour localiser un point de la Terre et éliminer les erreurs d'horloge dans la plupart des cas.

Les facteurs qui induisent des imprécisions sont nombreux, la difficulté majeure restant le calcul précis des temps de parcours des signaux qui traversent diverses couches de l'atmosphère. Pour résoudre ce problème délicat, les satellites émettent sur deux fréquences et le récepteur compte des périodes (un nombre entier). Le système (2) généralisé à un système de quatre équations non linéaires possède deux solutions $(x, y, z, \tau) \in \boldsymbol{R}^4$, mais certainement pas avec τ entier. Une solution entière τ_0 est calculée selon des méthodes statistiques et plus de quatre satellites doivent être pris en compte pour accroître la précision.

Pour des raisons de sécurité, les militaires américains codent volontairement les informations émisent par leurs satellites. La précision à laquelle on peut s'attendre sans décodeur est de l'ordre de 80 mètres. Les récepteurs des professionnels qui ont besoin de mesures fines communiquent non seulement avec les satellites, mais aussi avec une ou plusieurs stations terrestres dont les coordonnées sont connues. Il s'agit d'une technique appelée *GPS* différentiel (*DGPS*) qui s'avère très précise lorsque des stations de base sont à portée radio et que les distances en jeu ne sont pas trop grandes.

Signalons pour terminer que les européens ont décidé de développer un système indépendant basé sur leurs propres satellites. Baptisé *GALILEO*, il devrait être opérationnel en 2008.

IV. Références

[1] Richard B. Thompson, Global Positionning System : The Mathematics of GPS Receivers, Mathematics Magazine, 71:4 (1998), 260-269
[2] Gilbert Strang, The mathematics of GPS, SIAM News, 30:5 (1997)
[3] Dan Kalman, An Undetermined Linar System for GPS, College Mathematics Journal, 33:4 (2002), 384-390