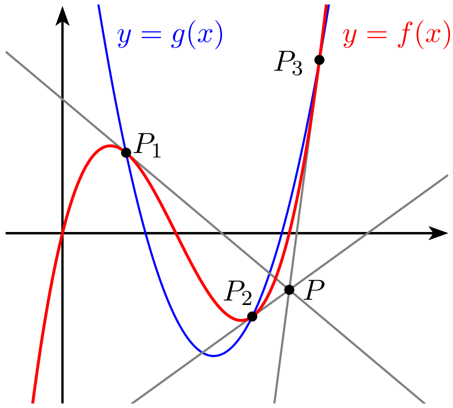
Le polynôme tangio-sécant

Cyril Pasquier, Université de Fribourg, cyril.pasquier@unifr.ch
Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont, alexandre.junod@rpn.ch

Le présent article provient d'un texte soumis à la CRM par le premier auteur, complété avec des cas particuliers donnés par le second.

1 Généralité

On considère un point $P(x_0; y_0)$ dans le plan et une fonction polynomiale f de degré $n > 1$. Les éventuelles tangentes au graphe de f passant par P touchent ce graphe en des points $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$. Nous allons fournir un polynôme g de degré inférieur à n dont le graphe passe par tous ces points. Nous l'appellerons *polynôme tangio-sécant* de f par rapport au point P.



La tangente au graphe de f en un point $P_i(x_i; y_i)$ admet l'équation $y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$. Si cette tangente doit passer par $P(x_0; y_0)$, on a alors $y_0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_0 - x_i)$.

Les abscisses $x = x_i$ des points de contact P_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ vérifient donc l'équation

$$-f(x) = (x_0 - x)f'(x) - y_0.$$

En ajoutant $k \cdot f(x)$ avec un nombre $k \neq 1$, on obtient l'équation équivalente

$$(k-1)f(x) = k \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0,$$

c'est-à-dire $f(x) = g_k(x)$ avec $g_k(x) = \dfrac{1}{k-1}(k \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0)$.

Si le polynôme f est de degré $n > 1$, avec un monôme dominant $a_n x^n$, alors le monôme potentiellement dominant de g_k est $\dfrac{(k-n)a_n}{k-1}x^n$. Si on veut minimiser le degré de g_k, on doit considérer $k = n$.

Ainsi, le polynôme $g(x) = g_n(x) = \dfrac{1}{n-1}(n \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0)$ est de degré strictement inférieur à celui de $f(x)$. Son graphe passe par tous les points $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$, obtenus par intersection avec le graphe de f. Pour un polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{n-1}\Big((n \cdot f(x) - x \cdot f'(x)) + x_0 f'(x) - y_0\Big) \\
&= \frac{1}{n-1}\Big(a_{n-1}x^{n-1} + 2a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + (n-2)a_2x^2 + (n-1)a_1x + na_0 \\
&\qquad + na_nx_0x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0x^{n-2} + \cdots + 2a_2x_0x + a_1x_0 - y_0\Big) \\
&= \frac{1}{n-1}\Big(\big(a_{n-1} + na_nx_0\big)x^{n-1} + \big(2a_{n-2} + (n-1)a_{n-1}x_0\big)x^{n-2} \\
&\qquad + \cdots + \big((n-1)a_1 + 2a_2x_0\big)x + \big(na_0 + a_1x_0 - y_0\big)\Big).
\end{aligned}$$

2 Le cas n = 2

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors le polynôme tangio-sécant par rapport à $P(x_0; y_0)$ est $g(x) = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0)$. Pour trouver l'abscisse des points de contact entre la parabole $y = f(x)$ et ses tangentes passant par $P(x_0; y_0)$, on peut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire

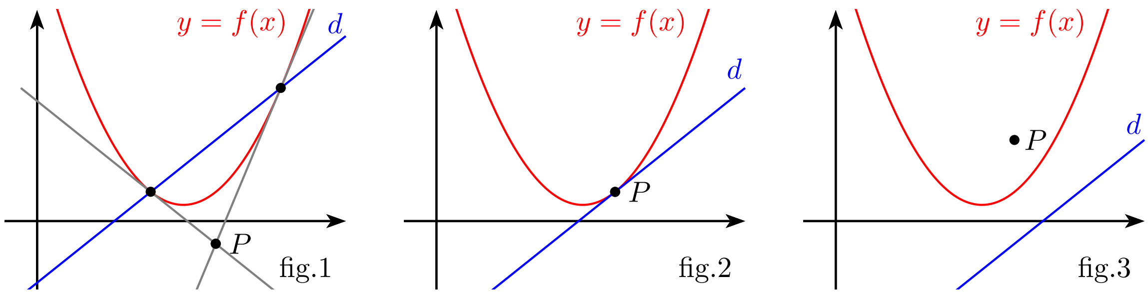
$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0), \\ &ax^2 - 2ax_0x + (y_0 - c - bx_0) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation quadratique est

$$\Delta = 4a^2x_0^2 - 4a(y_0 - c - bx_0) = 4a(ax_0^2 + bx_0 + c - y_0) = 4a(f(x_0) - y_0)$$

et les solutions sont $x = \dfrac{2ax_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2ax_0 \pm 2\sqrt{a(f(x_0) - y_0)}}{2a} = x_0 \pm \sqrt{\dfrac{f(x_0) - y_0}{a}}$.

La parabole d'équation $y = f(x)$ admet donc deux, une ou aucune tangente passant par P, selon que le produit $a(f(x_0) - y_0)$ est positif, nul ou négatif, ce qui signifie respectivement que le point P se trouve à l'extérieur de la parabole (fig.1), sur la parabole (fig.2), ou à l'intérieur de la parabole (fig.3).



Représenté en bleu dans les illustrations ci-dessus, le graphe du polynôme tangio-sécant est la droite d passant par les deux points de contact dans le premier cas, ou l'unique tangente dans le deuxième. On peut également donner une interprétation géométrique dans le troisième cas (qui reste valable dans les deux premiers) : la projection verticale de P sur la parabole est un point P^* et la droite d passe par le symétrique de P par rapport à P^*, parallèlement à la tangente à la parabole en P^*.

Preuve. Le projeté vertical de $P(x_0; y_0)$ sur la parabole $y = ax^2 + bx + c$ est $P^*(x_0; ax_0^2 + bx_0 + c)$. Le symétrique de P par rapport à P^* est $S(x_0; 2ax_0^2 + 2bx_0 + 2c - y_0)$ (il suffit de contrôler que le barycentre de P et S est bien P^*). On vérifie facilement que ce point se trouve sur la droite d d'équation $y = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0)$. De plus, la tangente à la parabole en P^* admet la pente $f'(x_0) = 2ax_0 + b$, ce qui correspond bien à la pente de la droite d. $\square$

3 Le cas n = 3

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$, alors le polynôme tangio-sécant par rapport à $P(x_0; y_0)$ est $g(x) = \left(\dfrac{3ax_0 + b}{2}\right)x^2 + (bx_0 + c)x + \left(\dfrac{cx_0 + 3d - y_0}{2}\right)$. Le nombre de tangentes au graphe de f passant par P correspond au nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire au nombre de zéros de $h(x) = f(x) - g(x)$. On a

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 3ax^2 + (b - 3ax_0)x - bx_0.$$

Le discriminant associé à cette fonction quadratique est

$$\Delta = (b - 3ax_0)^2 + 12abx_0 = b^2 - 6abx_0 + (3ax_0)^2 + 12abx_0 = b^2 + 6abx_0 + (3ax_0)^2 = (b + 3ax_0)^2$$

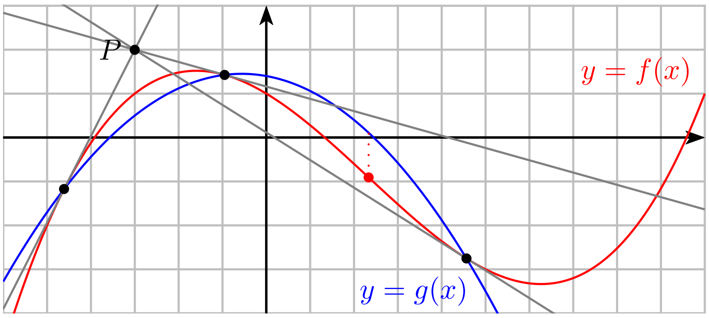
et si $b + 3ax_0 \neq 0$, le graphe de h admet deux points à tangente horizontale distincts d'abscisses

$$x = \frac{-b + 3ax_0 \pm (b + 3ax_0)}{6a} \in \left\{ x_0; \frac{-b}{3a} \right\}.$$

Remarquons au passage que $x = \dfrac{-b}{3a}$ est l'abscisse du point d'inflexion de la cubique $y = f(x)$. On a $h''(x) = 6ax + (b - 3ax_0)$ et on peut vérifier que $h''\left(\frac{-b}{3a}\right) = -(b + 3ax_0) = -h''(x_0) \neq 0$. On en déduit qu'un des points à tangente horizontale est un minimum alors que l'autre est un maximum (on peut également raisonner avec le tableau de variation de h). Si $h(x_0) \cdot h\left(\frac{-b}{3a}\right) < 0$, alors $h(x)$ s'annule trois fois (dont une fois exactement entre x_0 et $\frac{-b}{3a}$), donc l'équation $f(x) = g(x)$ a trois solutions. D'un point de vue géométrique, la cubique d'équation $y = f(x)$ possède trois tangentes qui passent par P et la parabole d'équation $y = g(x)$ passe par les trois points de tangence.

Application. Pour $f(x) = \dfrac{1}{50}(x^3 - 7x^2 - 30x + 50)$ et $P(-3; 2)$, on a $g(x) = -\dfrac{1}{50}(8x^2 + 9x - 70)$. Les nombres $x_0 = -3$ et $\dfrac{-b}{3a} = \dfrac{7}{3}$ sont différents et on a $f(-3) > g(-3)$ alors que $f\left(\dfrac{7}{3}\right) < g\left(\dfrac{7}{3}\right)$ (on peut le constater dans l'illustration ci-dessous). La cubique d'équation $y = f(x)$ admet donc trois tangentes passant par P. Les abscisses des points de contact sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, que l'on peut estimer par une méthode numérique :

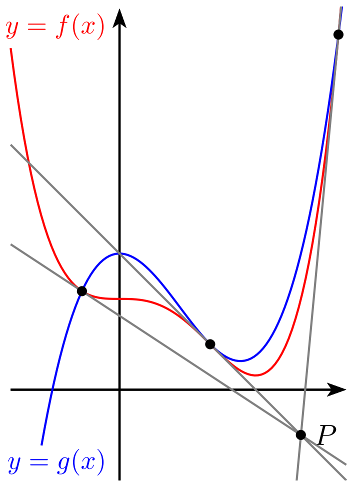
- $x_1 \cong -4.61$, donc $P_1(-4.61; -1.17)$
- $x_2 \cong -0.95$, donc $P_2(-0.95; 1.43)$
- $x_3 \cong 4.56$, donc $P_3(4.56; -2.75)$



4 Exemple (bien choisi) dans le cas n = 4

On considère le point $P\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ et le polynôme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 1.$$



Le polynôme tangio-sécant associé est alors $g(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}$. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les zéros de $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1)$. On devine la solution $x = 1$ et donc la factorisation $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x^3 - 3x^2 + x + 1)$. Comme le facteur cubique s'annule en $x = 1$, on peut le factoriser par $(x - 1)$ et on trouve $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1) \cdot (x - 1)(x^2 - 2x - 1) = \frac{1}{2}(x - 1)^2(x^2 - 2x - 1)$. Le facteur quadratique admet le discriminant $\Delta = 4 - (-4) = 8$ et les zéros

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Il y a donc trois tangentes au graphe de f passant par P et les abscisses des points de tangence sont $x = 1$, $x = 1 - \sqrt{2}$ et $x = 1 + \sqrt{2}$. Le fait que $x = 1$ soit une racine double de h implique que les graphes de f et de g sont tangents au point d'abscisse $x = 1$: si $f(x) - g(x) = (x - 1)^2 Q(x)$, alors $\dfrac{f(x) - g(x)}{x - 1} = (x - 1)Q(x)$ et, en prenant la limite lorsque x tend vers 1, $f'(1) - g'(1) = 0$.