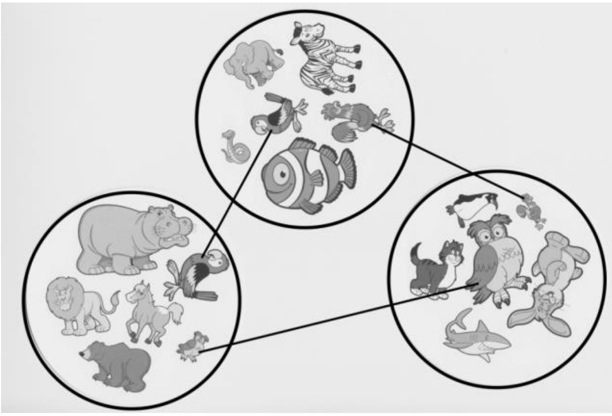
Le jeu « Dobble »

Vittorio Amadio, retraité du Lycée cantonal de Porrentruy, v.amadio@bluewin.ch

Le jeu

Le jeu « Dobble » est constitué d'un certain nombre de cartes rondes sur lesquelles apparaissent des symboles (six pour la version enfants et huit pour la version normale). Quelle que soit la paire de cartes, celles-ci ont un et un seul symbole commun.
Dans toutes les manières de jouer, il faut être le plus rapide à trouver ce symbole commun.



Problèmes

A peine rentré de Belgique où il a participé à un congrès d'enseignants de mathématiques, un ex-collègue me propose les problèmes suivants.

1. De combien de cartes au maximum est composé le jeu « Dobble » ?

   En d'autres termes, il s'agit de trouver, pour un nombre entier s donné (nombre de symboles par carte), des ensembles $C_1, \dots, Cq$ (les cartes), avec q maximum, tels que

   $$Card(C_i) = s \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, q\},$$

   $$Card(C_i \cap C_j) = 1 \text{ pour tous } i, j \text{ tels que } i \neq j.$$

2. Ce maximum est-il atteignable ? Si oui, existe-t-il une manière de procéder pour l'atteindre ?

Réponse au premier problème

Supposons qu'on ait un jeu ayant le nombre maximum de cartes.

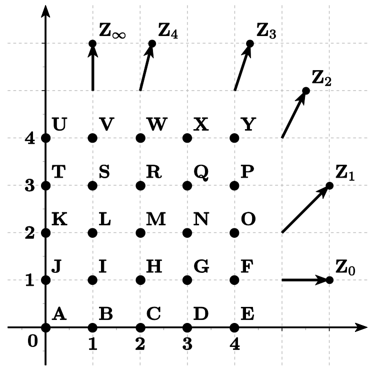
Supposons qu'un symbole donné, notons-le A, apparaisse sur r cartes, $C_1, C_2, \dots, C_r$. Pour que le jeu soit intéressant, il faut naturellement qu'il y ait au moins une carte qui ne contienne pas le A, sinon toutes les cartes auraient le même symbole en commun. Soit C_{r+1}, cette carte.
Comme $\forall i, 1 \leq i \leq r,\ Card(C_i \cap C_{r+1}) = 1$ et $Card(C_{r+1}) = s$ on doit avoir nécessairement $r \leq s$.

Prenons une carte au hasard. Cette carte possède s symboles. D'après ce qui précède, pour chacun de ces s symboles, on peut compter au plus $s-1$ autres cartes possédant ce symbole, ce qui donne finalement au maximum $1 + s \cdot (s-1)$ cartes différentes.

Réponse au second problème

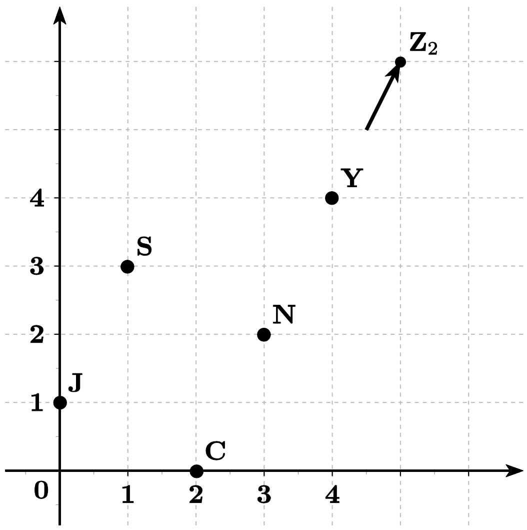
Vu la deuxième condition du premier problème, les C_i ne pourraient-ils pas être associés à des droites et les intersections à des points ?

Etudions pour commencer le cas particulier du jeu à six symboles par carte. Essayons d'associer à chaque carte une droite. Si on veut créer une bijection entre cartes et droites, il faut que ces dernières ne contiennent que six points, un point par symbole (ici, des lettres pour simplifier). De plus, comme deux droites parallèles se coupent à l'infini, il faudrait ajouter des points à l'infini dans la direction de chaque droite. Pour ce faire, on peut travailler dans $(\mathbb{Z}_5)^2$, auquel on ajoute six points à l'infini correspondant aux directions des vecteurs $(1;0), (1;1), (1;2), (1;3)$, $(1;4)$ et $(0;1)$.



On a défini ainsi 31 points, donc 31 symboles.

Comment se représentent ces droites dans $(\mathbb{Z}_5)^2$?

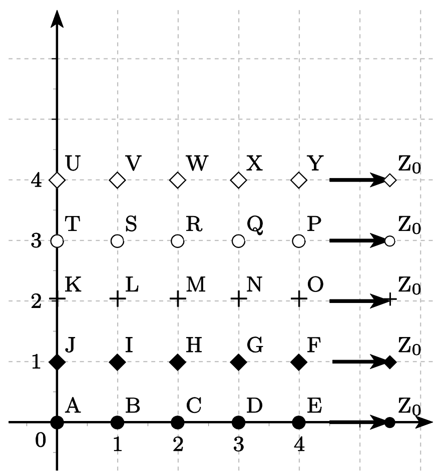


Prenons par exemple la droite d passant par le point J(0,1) et de pente 2 : $d\begin{cases} x = \mu \\ y = 1 + 2\mu \end{cases}$ avec $\mu \in \mathbb{Z}_5$.

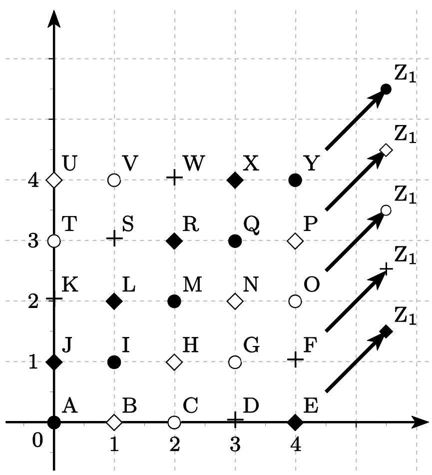
Pour $\mu = 0$, on a le point J(0,1). Pour $\mu = 1$, on a le point S(1,3). Pour $\mu = 2$, on a le point $(2,5) \equiv$ C(2,0). Pour $\mu = 3$, on a le point $(3,7) \equiv$ N(3,2). Pour $\mu = 4$, on a le point $(4,9) \equiv$ Y(4,4), auxquels on ajoute le point Z_2, point à l'infini dans la direction du vecteur $(1;2)$.

La droite d est l'ensemble des six points J, S, C, N, Y et Z_2.

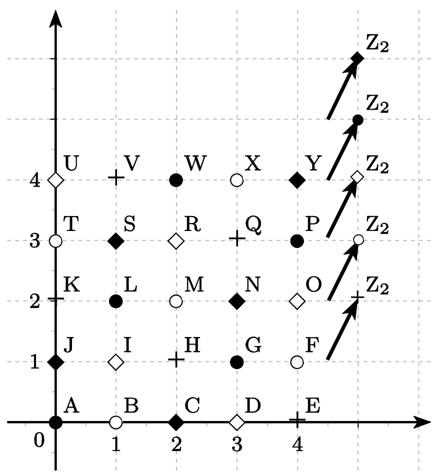
Considérons dans $(\mathbb{Z}_5)^2$, l'ensemble de toutes les droites. On a :



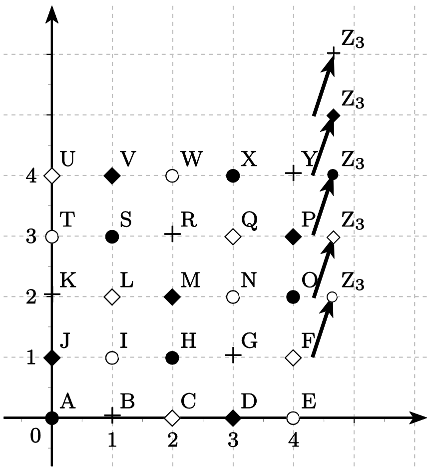
Cinq droites horizontales



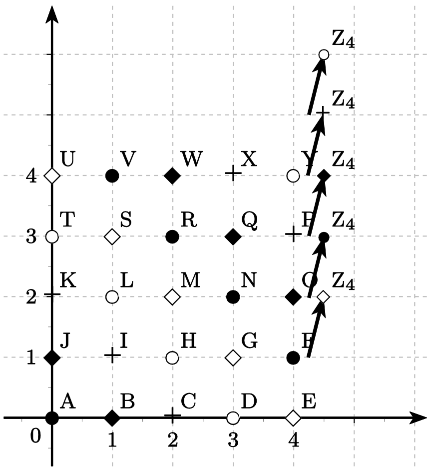
Cinq droites de pente 1



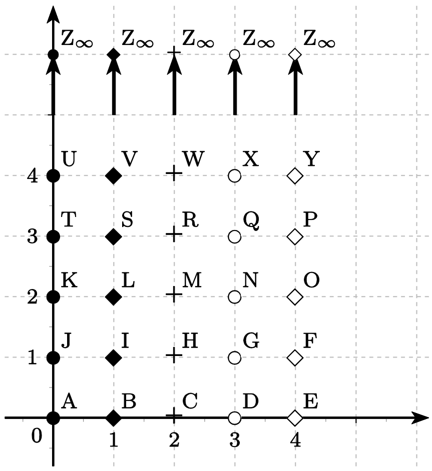
Cinq droites de pente 2



Cinq droites de pente 3



Cinq droites de pente 4



Cinq droites verticales

Il y en a donc 31 si on tient compte de la droite des points à l'infini. Chacune de ces droites « passe » par 6 points. Comme vu ci-dessus, par exemple, la droite de pente 2 passant par (0,1) « passe » par J, S, C, N, Y et Z_2. On peut donc lui associer la carte contenant les 6 symboles J, S, C, N, Y et Z_2. On peut en faire de même avec chacune des droites.

Reste à vérifier que deux cartes n'ont qu'un seul symbole commun, c'est-à-dire que deux droites de $(\mathbb{Z}_5)^2$ se coupent en un seul point, comme c'est le cas dans $\mathbb{R}^2$.

Deux droites distinctes de $(\mathbb{Z}_5)^2$ se coupent-elles nécessairement en un et un seul point ?

- Si elles ont la même pente, alors elles se coupent au point qui est à l'infini dans la direction du « vecteur directeur » de ces droites.
- Si elles ont des pentes différentes m et m' , $m \in \mathbb{Z}_5$, $m' \in \mathbb{Z}_5$.
  Soit la droite d de pente m passant par le point $(0, h)$ et la droite d' de pente m' passant par le point $(0, h')$.
  On peut écrire ces droites sous la forme :

  $d\begin{cases} x = 0 + \mu \\ y = h + \mu m \end{cases}$ et $d'\begin{cases} x = 0 + \sigma \\ y = h' + \sigma m' \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}_5)^2$ avec $m \neq m'$.

  Résolvons le système, ce qui nous conduit à résoudre :

  $$\begin{vmatrix} 0 + \mu = 0 + \sigma \ (mod\ 5) \\ h + \mu m = h' + \sigma m' \ (mod\ 5) \end{vmatrix}$$

  On a donc $\sigma = \mu\ (mod\ 5)$ et $h + \mu m = h' + \sigma m' (mod\ 5)$,

  d'où $\boldsymbol{h - h' = \mu(m' - m)\ (mod\ 5)}$. (①)

  Comme $\mathbb{Z}_5$ est **intègre**, il existe une seule valeur du paramètre μ qui vérifie cette équation. Donc deux droites non parallèles se coupent en un et un seul point.
- Si l'une des deux droites est la verticale v passant par $(a, 0)$ et l'autre la droite d' de pente m' passant par le point $(0, h')$.
  On a $v\begin{cases} x = a \\ y = 0 + \mu \end{cases}$ et $d'\begin{cases} x = 0 + \sigma \\ y = h' + \sigma m' \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}_5)^2$.
  D'où $\sigma = a$ et ces deux droites se coupent au point $(a, h' + am')$.
- Si l'une des droites est la droite des points à l'infini, alors elles se coupent au point à l'infini dans la direction de l'autre droite.

Dans tous les cas, deux droites distinctes se coupent en un et un seul point. Elles ont ainsi un et un seul point commun. Par conséquent, si on associe une carte à chaque droite, deux cartes ont un et un seul symbole commun.

Cette méthode de construction permet de conclure qu'on peut définir au moins 31 cartes différentes. Or, pour 6 symboles par cartes, on a montré, dans la première partie, qu'on a au plus $1 + 6 \cdot (6 - 1) = 31$ cartes différentes possibles. Donc, pour 6 symboles, le maximum de 31 cartes est atteint par la méthode proposée.

Peut-on appliquer ce raisonnement à n'importe quel nombre de symboles par carte ?

La réponse est non. En effet, dans le cas de s symboles par carte, la recherche de l'intersection de deux droites nous conduit à l'équation :

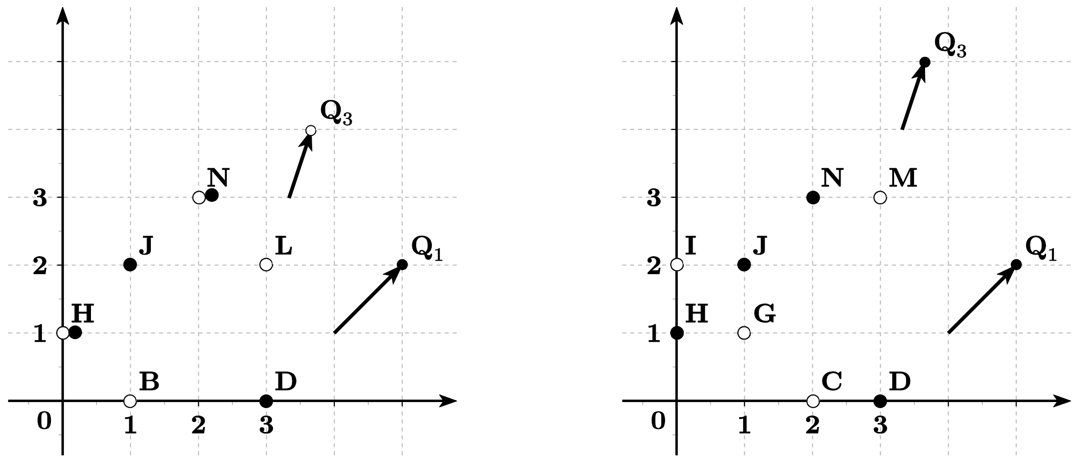
$\boldsymbol{h - h' = \mu(m' - m)\ (mod\ (s-1))}$ (voir (①)).

Celle-ci n'admet une solution unique que si $\mathbb{Z}_{s-1}$ est intègre, c'est-à-dire si $s-1$ est premier. Le raisonnement ci-dessus ne peut être appliqué qu'aux cas où le nombre de symboles par carte est un nombre premier augmenté de 1.

Par exemple, si on prend cinq symboles, l'équation $h - h' = \mu(m' - m)\ (mod\ 4)$ peut soit ne pas admettre de solutions, soit en admettre une seule, soit en posséder plusieurs, car $\mathbb{Z}_4$ n'est pas intègre. Pour qu'il y ait une seule solution, il faut que pgdc$(m' - m, 4) = 1$. Sinon on aura soit plusieurs solutions, soit aucune.

Par exemple, la droite d de pente 1 passant par $(0,1)$ et la droite d' de pente 3 passant également par $(0,1)$ se coupent évidemment en $(0,1)$, mais aussi en $(2,3)$! Les cartes HJNDQ$_1$ et HBNLQ$_3$ auront deux symboles communs.

Par contre la droite d et la droite d'' de pente 3 passant par $(0,2)$ ne se coupent pas.



Il en est de même pour les droites de pente 2 et les horizontales.

Dans le cas de cartes à cinq symboles, on peut prendre les verticales, les horizontales (ce qui exclut les droites de pente 2), les droites de pente 1 (ce qui exclut les droites de pente 3), et la droite des points à l'infini. On a donc 13 droites, soit 13 cartes pour 21 symboles.

Pour $s = 7$, on peut prendre les six verticales, les six droites horizontales (ce qui exclut les droites de pente 2, 3 et 4), les six droites de pente 1 (ce qui exclut en plus les droites de pente 5) et la droite des points à l'infini, soit 19 droites, donc 19 cartes pour 43 symboles.

En conclusion

Si le nombre s de symboles par carte est un nombre premier augmenté de 1, notre méthode permet de construire autant de cartes que de droites dans $(\mathbb{Z}_{s-1})^2$, c'est-à-dire : $s-1$ droites de pente 0, $s-1$ de pente 1, …, $s-1$ de pente $s-1$, auxquelles il faut ajouter la droite des points à l'infini.

Elle permet donc de construire $s \cdot (s-1) + 1$ cartes différentes.

Or d'après la réponse au premier problème, le nombre maximal de cartes est donné par cette même formule.

On peut donc en conclure :

Si le nombre s de symboles par carte est un nombre premier augmenté de 1, le nombre maximum de cartes est égal $\boxed{\boldsymbol{s \cdot (s-1) + 1}}$ et la méthode décrite ci-dessus permet de l'atteindre.

Quant au nombre de symboles, il est toujours égal au nombre de points dans $(\mathbb{Z}_{s-1})^2$, auxquels il faut ajouter les points à l'infini, soit :

$(s-1)^2 + s = s^2 - s + 1 = s \cdot (s-1) + 1$ symboles, qui est donc identique au nombre de cartes, dans le cas toujours où $s-1$ est premier.

En résumé

Par application de la formule lorsque $s-1$ est premier ou par comptage des droites qui vérifient les propriétés :

Nombre de symboles par carte	Nombre de symboles = Nombre maximum théorique de cartes	Nombre de cartes construites avec cette manière de procéder
2	**3**	**3**
3	**7**	**7**
4	**13**	**13**
5	21	13(**)
6	**31(*)**	**31**
7	43	19(**)
8	**57(*)**	**57**
9	73	25(**)
10	91	37(**)

(*) Les jeux qu'on trouve dans le commerce comptent respectivement 30 et 55 cartes. Il en manque donc respectivement une et deux. Je vous laisse le soin de trouver lesquelles.

(**) D'autres manières de procéder peuvent donner de meilleurs résultats. Par exemple, pour $s = 5$, le maximum de 21 cartes est atteignable.

Sites consultés

http://orbi.ulg.ac.be/handle/2268/201176

http://eljjdx.canalblog.com/archives/2014/07/06/30181178.html