Sangaku (II)

par
Mireille Schumacher
Gymnase d'Yverdon mireille.schumacher@gmail.com

La première partie de cet article **Sangaku (I)** est parue en mai 2014, dans le numéro 125 du Bulletin de la SSPMP p.5-8.

Résumé : Réaliser un sangaku à partir d'un modèle donné, n'est pas toujours une tâche facile. L'observation de la figure géométrique peinte (Figure 1) permet de déduire les informations principales concernant l'énoncé du problème posé. Pour certains sangaku, la résolution de l'énigme proposée relève de simples calculs, alors que la construction à la règle et au compas est d'un tout autre ordre de difficultés. La réciproque est aussi vraie. Les exemples présentés ci-dessous illustrent ce propos.

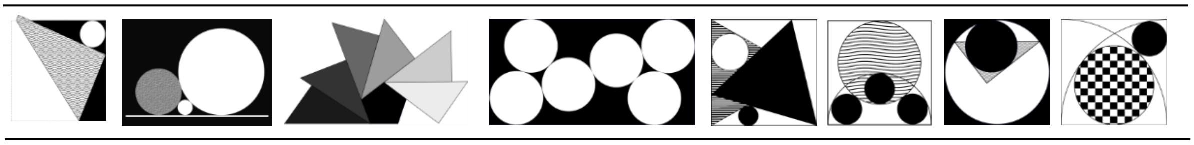
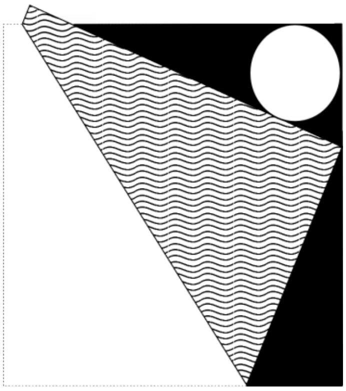


Figure 1.-Galerie de sangaku.

DES PROBLEMES EPURES

Résolution de l'énigme du sangaku Origami



Le sangaku *Origami* (Figure 2) accompagné de seize autres problèmes ainsi que du nom de l'auteur, Akama Chû est peint sur une tablette datée de 1813, toujours exposée dans un temple Mangan-ji de la préfecture de Fukushima. L'énigme du sangaku *Origami* invite à prouver le résultat suivant :
« Prendre une feuille de papier carrée. La plier de manière à amener un des coins sur le côté opposé. La mesure du rayon du cercle inscrit dans le triangle supérieur est égale à la mesure d'un des côtés du triangle en débord de la feuille ».

Figure 2.-Sangaku *Origami*.

i) *Lemme préparatoire* : Dans un triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit vaut la somme des longueurs des cathètes diminuée de la longueur de l'hypoténuse.

Démonstration (Figure 3)
Soit r le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle d'hypoténuse c et de cathètes a et b avec $0 < a < b < c$. Il s'en suit que $0 < r < \frac{a}{2}$.

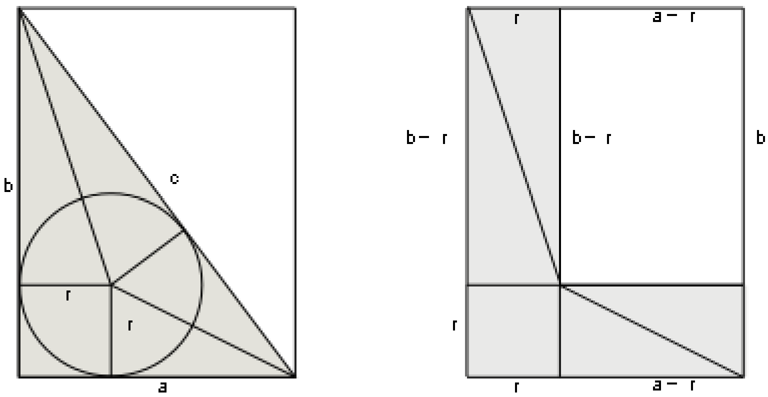


Figure 3.-Lemme Sangaku *Origami*.

La mesure de l'aire ombrée du dessin de gauche (Figure 3) vaut :

$$\sigma = r^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}r\left(a-r\right)+\frac{1}{2}r\left(b-r\right)\right) \Leftrightarrow \sigma = r^2 + r\left(a-r\right)+r\left(b-r\right) \Leftrightarrow \sigma = r\left(a+b-r\right)$$

En déplaçant les triangles ombrés de ce premier dessin, on obtient une aire ombrée d'égale mesure à la précédente, les deux aires blanches restant égales (dessin de droite Figure 3) :

$$r\left(a+b-r\right)=\left(a-r\right)\left(b-r\right) \Leftrightarrow 2r^2-2\left(a+b\right)r+ab=0$$

Les solutions de cette équation sont $r=\dfrac{\left(a+b\right)\pm\sqrt{\left(a+b\right)^2-2\cdot ab}}{2}=\dfrac{\left(a+b\right)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

La solution $r=\dfrac{\left(a+b\right)+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ est à rejeter, car plus grande que $\dfrac{a}{2}$. L'autre solution dans laquelle on substitue a^2+b^2 par c^2, donne $2r=\left(a+b\right)-\sqrt{a^2+b^2}=\left(a+b\right)-c$ ce qui démontre le lemme.

ii) *Démontrons que* : la mesure du rayon du cercle inscrit dans le triangle supérieur du sangaku *Origami* est égale à la mesure d'un des côtés du triangle en débord de la feuille carrée pliée.

Soit $ABCD$ un carré de côté 1 (Figure 4). Plier ce carré de manière à ce que le sommet A se situe sur le côté BC. Notons X et I les images respectives des points A et D lors de ce pliage ; K est le point d'intersection du segment XI avec le côté CD du carré, U est le point du pli du segment AB.

Notons $k=BX$ la distance de B à X, avec $k\neq 1$ et $B\neq X$, $x=CK$ et $y=AU$.

Il s'agit de démontrer que $r=KI$ **.**

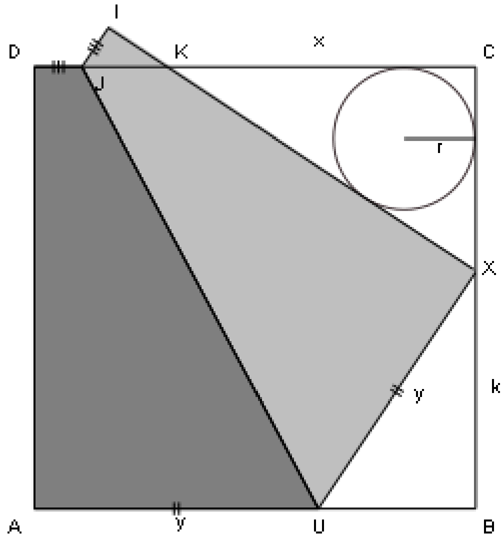


Figure 4.-Le rayon du cercle *r = KI*.

Par similitude des triangles rectangles XCK et UBX, on établit la relation : $\dfrac{x}{1-k}=\dfrac{k}{1-y}$ (1)

Le théorème de Pythagore s'applique au triangle UBX : $k^2+\left(1-y\right)^2=y^2$ (2)

Résoudre le système de deux équations à deux inconnues (1) et (2) :

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1-k}=\dfrac{k}{1-y}\\ k^2+\left(1-y\right)^2=y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{1-k}=\dfrac{k}{1-y}\\ k^2+1-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{1-k}=\dfrac{k}{1-\dfrac{1+k^2}{2}}\\ y=\dfrac{1+k^2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-k} = \dfrac{k}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{k^2}{2}} \\ y = \dfrac{1+k^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1-k} = \dfrac{2k}{1-k^2} \\ y = \dfrac{1+k^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k}{1+k} \\ y = \dfrac{1+k^2}{2} \end{cases} \quad \text{pour } k \neq 1$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle XCK, on obtient :

$$XK^2 = (1-k)^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad XK^2 = (1-k)^2 + \left(\frac{2k}{1+k}\right)^2 \text{ par ce qui précède} \quad \Leftrightarrow$$

$$XK^2 = \frac{\left[(1-k)(1+k)\right]^2 + 4k^2}{(1+k)^2} \quad \Leftrightarrow \quad XK^2 = \frac{\left[(1-k^2)\right]^2 + 4k^2}{(1+k)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$XK^2 = \frac{1-2k^2+k^4+4k^2}{(1+k)^2} \quad \Leftrightarrow \quad XK^2 = \frac{1+2k^2+k^4}{(1+k)^2} \quad \Leftrightarrow \quad XK^2 = \frac{(1+k^2)^2}{(1+k)^2}$$

D'où $XK = \dfrac{1+k^2}{1+k}$. Puisque $KI = 1 - XK$, alors $KI = 1 - \dfrac{1+k^2}{1+k} = \dfrac{k-k^2}{1+k}$ (3)

En appliquant le lemme démontré ci-dessus, le diamètre $2r$ du cercle inscrit dans le triangle XCK est égal à $2r = (1-k) + x - XK = (1-k) + \dfrac{2k}{1+k} - \dfrac{1+k^2}{1+k} = \dfrac{2k-2k^2}{1+k} \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{k-k^2}{1+k}$ (4)

Les formules (3) et (4) étant identiques, on en déduit que $r = KI$ CQFD

Résolution du sangaku Les trois cercles

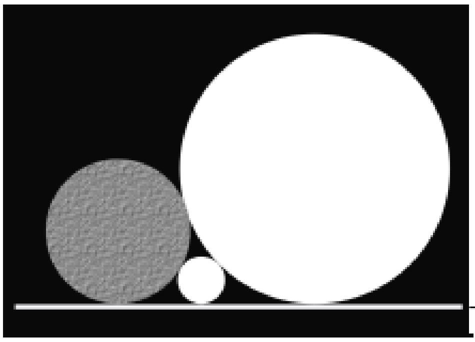


Figure 5.- Sangaku *Les trois cercles*

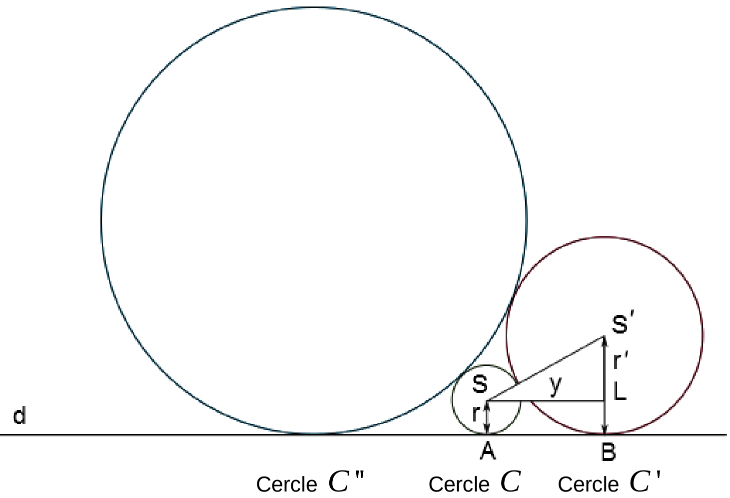


Figure 6.- Lemme Sangaku *Les trois cercles*

Le plus célèbre des sangaku, *Les trois cercles* (Figure 5), est peint sur une tablette datée de 1824 exposée au Japon dans la préfecture de Gunma. L'énigme consiste à établir un lien entre les rayons de trois cercles tangents entre eux extérieurement, ainsi qu'à une droite.

i) *Lemme préparatoire* (Figure 6)

Soit C et C' deux cercles tangents extérieurement, de rayon respectif r et r'. La distance entre les points de contact d'une tangente commune à ces cercles est égale à $2\sqrt{r \cdot r'}$.

Démonstration : Soit C le cercle de centre S et de rayon r ; C' le cercle de centre S' et de rayon r' ; y la distance entre les points de contact A et B d'une tangente commune d à ces cercles ; L la projection orthogonale du point S sur le segment BS'.

Par le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle SLS', on a : $y^2+(r-r')^2=(r+r')^2$ $\Leftrightarrow$ $y^2+r^2-2r\cdot r'+r'^2=r^2+2r\cdot r'+r'^2$ $\Leftrightarrow$ $y^2=4r\cdot r'$ $\Leftrightarrow$ $y=2\sqrt{r\cdot r'}$.

ii) On considère C, C' et C'' trois cercles de rayon respectif r, r' et r'', tangents entre eux extérieurement, ainsi qu'à une droite d (Figure 6).

En appliquant le lemme aux cercles C' et C'', C et C', C et C'', on obtient la relation : $2\sqrt{r'\cdot r''}=2\sqrt{r\cdot r'}+2\sqrt{r\cdot r''}$ qui, lorsqu'on divise chacun de ses membres par $2\sqrt{r\cdot r'\cdot r''}$ démontre que les rayons de ces trois cercles sont liés par la relation $\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r'}}+\frac{1}{\sqrt{r''}}$.

Construction du sangaku Les trois cercles

A lui seul, ce sujet mériterait qu'on lui consacre un riche article. Aborder la **construction à la règle et au compas** de ce sangaku n'est pas sans rappeler les dix problèmes d'Apollonius de Perge (262 – 190 av. J.-C.) géomètre et astronome grec. Le *Traité des contacts*, ouvrage perdu d'Apollonius, se proposait de déterminer des cercles astreints à trois conditions prises parmi celles qui consistent à passer par *un point* donné, ou *à être tangent à une droite ou à un cercle* donné, ce qui correspond à dix problèmes désignés par les symboles PPP, DDD, PPD (Figure 7), PPC, PDD, PCC, PDC, DDC, DCC et CCC en représentant un point par P, une droite par D et un cercle par C. Le problème CCC, des trois cercles, a été présenté par Pappus (IVème siècle après J.-C.) comme étant le dixième et le plus difficile. C'est un des grands problèmes de l'Antiquité grecque. Dans *l'Apollonius Gallus*, François Viète (1540 – 1603) va résoudre les dix problèmes de contact.

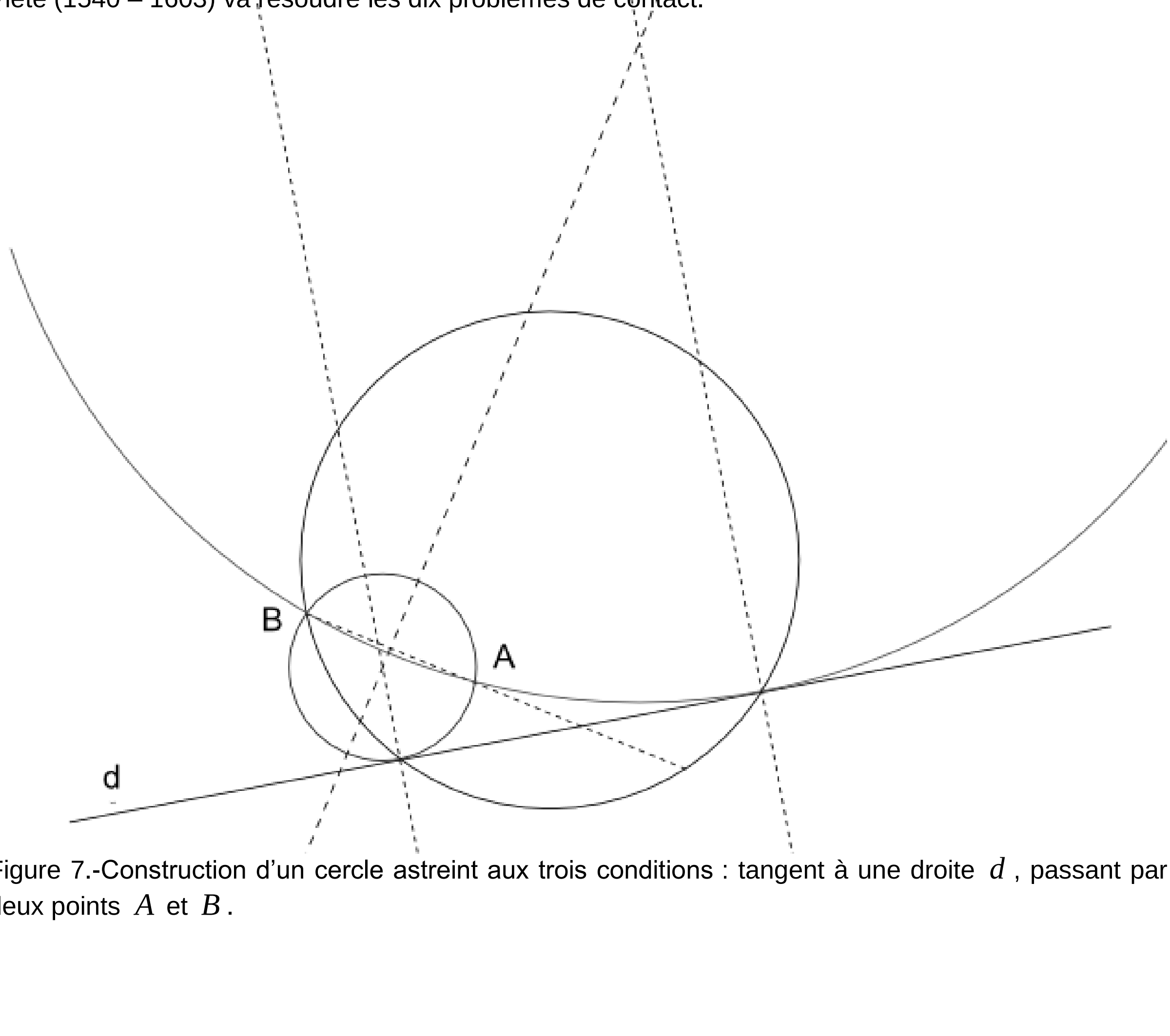


Figure 7.-Construction d'un cercle astreint aux trois conditions : tangent à une droite d, passant par deux points A et B.

CHERCHER ET APPROFONDIR

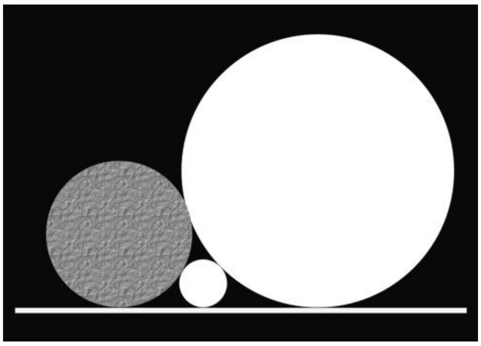


Figure 5.- Sangaku *Les trois cercles*

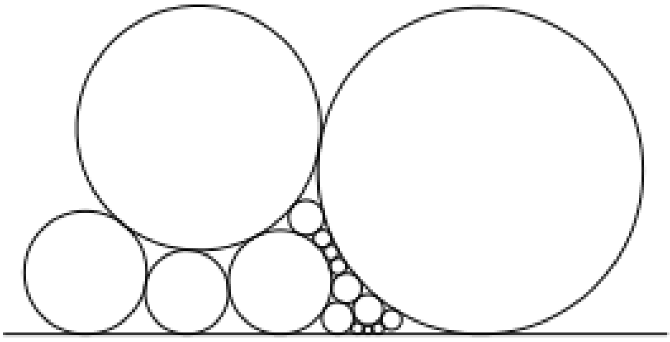


Figure 8.- © R. W. Brooks « circle packings »

La juxtaposition des figures 5 et 8 laisse penser que ces deux compositions géométriques datent de la même époque. La figure 8 est extraite des travaux d'*empilement de cercles* ou *circle packings* du mathématicien Robert W. Brooks (Washington 1952 – Montréal 2002). Le célèbre « Brook's circle packing parameter theorem » joue un rôle important dans les travaux contemporains de recherche pour l'approche de l'uniformisation des surfaces de Riemann. Dans un article en hommage à Robert Brooks, le professeur Peter Buser donne une nouvelle preuve de ce théorème et présente cet élégant empilement de cercles (Figure 8) (BUSER P., 2005).

CONCLUSION

Proposer des sangaku à ses élèves c'est :
- Disposer d'un support pédagogique stimulant pour explorer de belles mathématiques
- Observer. Conjecturer, analyser, chercher, comprendre
- Entrer dans une autre géométrie du triangle dans laquelle un triangle est avant tout un polygone plein, avec pour objets fondamentaux son aire, son périmètre et son cercle inscrit
- Mettre en évidence le cheminement vers une démonstration
- Utiliser des transformations géométriques : homothéties, inversion
- Aborder des problèmes historiques

Le livre « *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises* » de Géry Huvent (HUVENT G., 2008) qui m'a permis de découvrir les sangaku est une source d'applications géométriques que je vous recommande vivement.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mesdames et Messieurs : Muriel Bovey, Peter Buser, Olivier Desponds, Géry Huvent, Anne-Marie Naudy et Alain Schumacher, pour leur diligence, leur précieuse aide ainsi que pour leurs conseils avisés, lors de la conception de ce manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

BUSER P., 2005. *On the mathematical work of Robert Brooks, Dedicated to the memory of Robert Brooks*. Geometry, spectral theory, groups, and dynamics, pages 1-35, Contemp. Math., 387, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
DELERUE N., 2008. *Mathématiques japonaises*. Tangente 125 : 44-46.
HUVENT G., 2008. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.
HUVENT G., 2013. http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/index_explorer.htm Rubrique math-art
INTERACTIVE MATHEMATICS MISCELLANY AND PUZZLES, 1997-2013. http://www.cut-the-knot.org/ Rubrique sangaku : Thoughts&Problems.
STEPHENSON K., 2005. *Introduction to Circle Packing. The theory of discrete analytic functions*. Cambridge University Press.