L’article ci-dessous a été publié dans sa version originale en allemand dans le Bulletin 108 d’octobre dernier. Sa lecture étant à la portée d’élèves intéressés, j’ai incité à sa traduction de sorte que les jeunes romands puissent suivre cette réflexion subtile et imagée. Je tiens à remercier ici mes collègues Christine Jacob (Freies Gymnasium Zürich) pour sa traduction et Jean-Marc Ledermann (Lycée Denis-de-Rougemont) pour la rédaction finale.

Hansjürg Stocker, président de la DMK

Une perle de l’analyse pluridimensionnelle

Meike Akveld, MNG Rämibühl, Zurich

C’est par hasard que je suis tombée sur la vidéo Marston Morse in «Pits, Peaks & Passes» Part 1 & 2 de la MAA[1]. Marston Morse (1892-1977) y montre lui-même comment il est possible de prouver de manière élémentaire que sur une île (dotée d’une seule ligne côtière), la relation suivant s’avère correct.

$$M_0 - M_1 + M_2 = 1 \qquad (1)$$

où M_0 représente le nombre de sommets (peaks), M_1 le nombre de cols (passes) et M_2 le nombre de dépressions (pits).

Avant d’examiner les détails techniques, j’aimerais montrer quelques exemples et présenter la preuve – très simple – telle que je l’ai vue pour la première fois sur la vidéo de Marston Morse; celle-ci m’a convaincue à tel point que j’ai demandé à Thomas Vontobel, enseignant d’arts visuels dans mon établissement, de reproduire ce modèle, un grand merci !

L’exemple le plus simple est constitué par une île pourvue d’une seule montagne. L’île a donc un sommet ($M_0 = 1$), mais ne présente aucun col ($M_1 = 0$) ni dépression ($M_2 = 0$), comme le montre l’illustration 1 (gauche). Dans ce cas, l’équation (1) qui s’écrit $1 - 0 + 0 = 1$, est vérifiée.

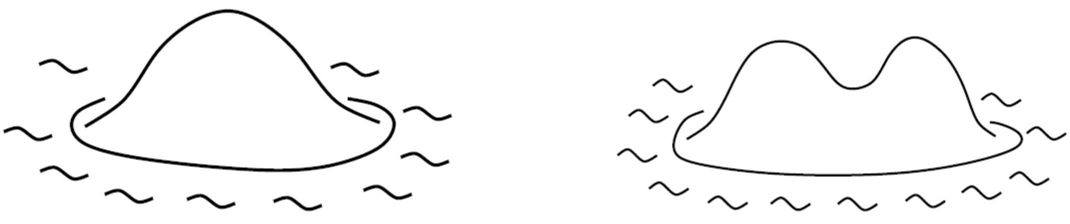

Illustration 1 : une montagne (à gauche) et deux sommets et un col (à droite).

L’île située à droite de l’illustration 1 présente un exemple un peu plus complexe, elle possède deux montagnes et un col. $M_0 = 2$, $M_1 = 1$, $M_2 = 0$, donc $2 - 1 + 0 = 1$ qui vérifie une fois encore l’équation (1). Je vous laisse continuer l’expérience !

[1] Mathematical Association of America

Preuve

La preuve repose sur l'idée suivante. Imaginez-vous l'île sous forme de modèle, avec un petit trou dans chaque sommet. Retournez ensuite l'île, de manière à visualiser un bassin, comme le montre l'illustration 2. Nous pouvons sans autre supposer que toutes les dépressions, tous les cols et tous les sommets présentent différentes hauteurs.

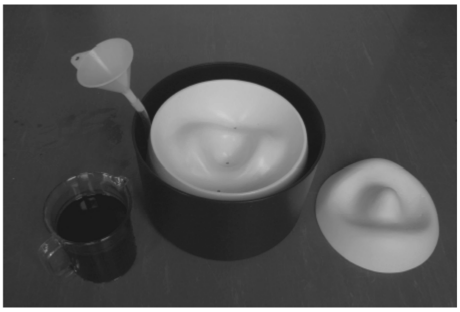

Illustration 2 : une île, à l'endroit et retournée.

Vous remarquez que les dépressions se sont transformées en sommets et inversement, alors que les cols restent des cols. Bien que M_0 et M_1 soient inversés, l'équation (1) reste valable. Si nous plongeons ensuite lentement notre modèle dans l'eau, de petits lacs se forment. Au fur et à mesure que l'eau monte, ceux-ci se retrouvent reliés. A la fin, il nous reste un seul lac et une seule ligne côtière, lesquels constituent désormais les seules données fondamentale – voir l'illustration 3.

Illustration 3 : le niveau de l'eau monte

Observons tout d'abord le nombre de lacs. Au début, il n'y a pas de lac. Chaque fois que le niveau de l'eau dépasse une nouvelle dépression (laquelle était originairement un sommet), un nouveau lac se crée – voir l'illustration 4. Ceci se produit en tout M_0 fois.

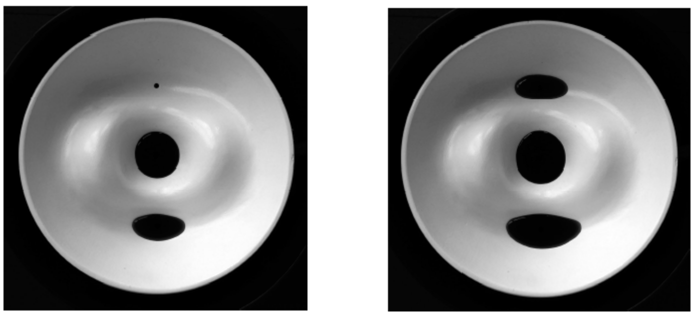

Illustration 4 : un nouveau lac se forme (en haut)

Pour les cols, c'est un peu plus compliqué. Soit deux lacs se rejoignent et le nombre de lac se réduit de un – voir l'illustration 5 – , soit un lac se rejoint lui-même, ce qui ne joue aucun rôle sur le nombre total de lacs – voir l'illustration 6.

Nous devons donc distinguer deux types de cols.

- M^- = nombre de cols suite à la transformation desquels le nombre de lacs se réduit de un.
- M^+ = nombre de cols suite à la transformation desquels le nombre de lacs reste constant.

Vous remarquez que le nombre total des cols se compose uniquement de ces deux types, soit

$$M_1 = M^- + M^+ \qquad (2)$$

Pour simplifier, nous en restons à la définition de départ, selon laquelle M_0 représente le nombre de sommets et M_2 le nombre de dépressions dans le modèle original. Étant donné qu'un nouveau lac se forme M_0 fois, qu'un lac disparaît M^- fois, et qu'à la fin il ne subsiste qu'un seul lac, la relation suivante est alors satisfaite.

$$M_0 - M^- = 1 \qquad (3)$$

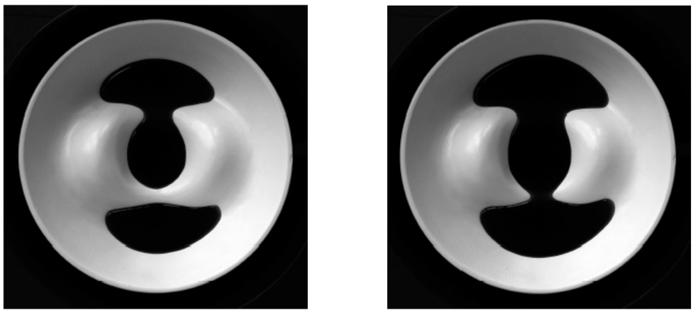

Illustration 5 : deux lacs se rejoignent ou col de type M^-

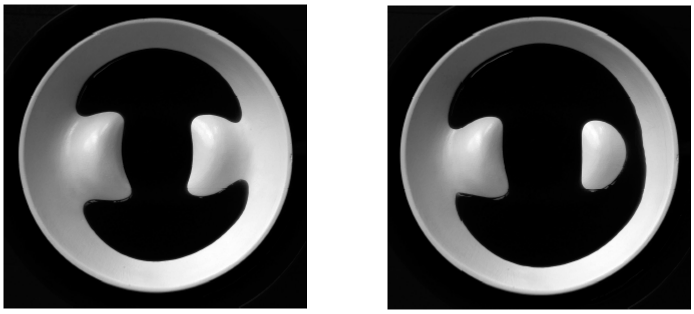

Illustration 6 : un lac se rejoint lui-même ou col de type M^+

Qu'advient-il de la ligne côtière ? Chaque fois que le niveau de l'eau remplit une dépression, un nouveau lac se forme et nous obtenons donc une ligne côtière supplémentaire – voir l'illustration 4.

Lorsque l'eau dépasse un col, deux phénomènes peuvent se produire : deux lacs se rejoignent, ce qui réduit le nombre de lignes côtières de un – voir l'illustration 5 – , ou un lac se rejoint lui-même et forme ainsi un anneau, ce qui conduit à augmenter le nombre de lignes côtières de un – voir l'illustration 6.

Finalement, chaque fois que l'eau passe au-dessus d'un sommet (à l'origine une dépression), une ligne côtière disparaît – voir l'illustration 7.

Illustration 7 : un sommet disparaît

À la fin, nous avons encore une ligne côtière. Nous pouvons résumer le tout de la manière suivante.

$$M_0 - M^- + M^+ - M_2 = 1 \qquad (4)$$

La preuve est bientôt terminée.

$$\begin{array}{lll} 2\text{ x} & M_0 - M^- \qquad\qquad = 1 & (3) \\ - & \underline{M_0 - M^- + M^+ - M_2 = 1} & (4) \\ & M_0 - M^- - M^+ + M_2 = 1 & \end{array}$$

que nous transformons en

$$M_0 - (M^- + M^+) + M_2 = 1$$

ce qui, à l'aide de l'équation (2) équivaut à

$$M_0 - M_1 + M_2 = 1$$

C.Q.F.D.

Arrière-plan

Marston Morse, le petit-fils intellectuel d'Henri Poincaré, est connu pour ses travaux en matière de géométrie différentielle. La «Théorie de Morse» propose une passerelle entre la théorie des points critiques (analyse) et la topologie des variétés. Dans notre exemple les points critiques correspondent exactement aux lacs, cols et sommets. L'hypothèse selon laquelle, quelle que soit la forme de l'île, la relation (1) est valable, est vérifiée. Autrement dit, nous pouvons déformer l'île autant que nous le désirons, l'équation reste valable – un principe topologique. L'hypothèse peut également être inversée, quoi que nous choisissions pour M_0, M_1 et M_2, aussi longtemps que $M_1 \geq 1$ et que l'équation est vérifiée, nous pouvons construire une île avec le nombre désiré de dépressions, cols et sommets (exercice !). Une conséquence directe est que sur terre, une équation semblable est prouvée, à savoir

$$M_0 - M_1 + M_2 = 2$$

Le 2 doit être identifié comme le 2 du théorème d'Euler relatif aux polyèdres.

Détails techniques

Il est nécessaire de prendre quelques précautions. Qu'en est-il d'une île présentant un plateau ou que faire des vallées latérales? Le théorème n'est plus applicable. Le problème est que nos points critiques sont ici non dégénérés. Sans vouloir entrer en matière sur ce concept, nous pouvons facilement trouver une solution, faites légèrement pencher l'île et vous retrouverez les sommets et les dépressions – sauvés!

Référence

Marston Morse in "Pits, Peaks & Passes" Part 1&2, Video of the Mathematical Association of America, 1529 Eighteenth Street N.W., Washington D.C. 20036.

Meike Akveld, akveld@math.ethz.ch