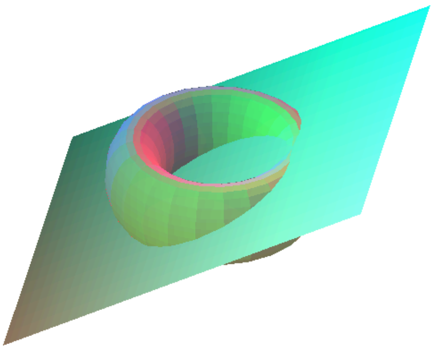
Les cercles de Villarceau

Jean Piquerez
Collège et Ecole de Commerce Madame de Staël

Lors d'un cours de perfectionnement de la CRM donné au Brassus, Marcel Berger, éminent géomètre, avait évoqué les cercles de Villarceau. Il s'agit de deux cercles sécants de même rayon obtenus par l'intersection d'un plan bien choisi avec un tore (voir figure 1).

Figure 1



Ma perception de l'espace étant fort limitée, j'ai tenté une approche algébrique du problème. Imaginons un tore de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R+2r$, centré à l'origine des axes, et essayons de déterminer l'équation de cette surface de l'espace.

Soit un point $M(x;y;z)$ quelconque du tore.
Si l'on coupe le tore par un plan contenant (Oz) et passant par M, ce plan détermine sur le tore un cercle de rayon r et de centre $I(\frac{x(R+r)}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{y(R+r)}{\sqrt{x^2+y^2}};0)$ (voir figure 2).

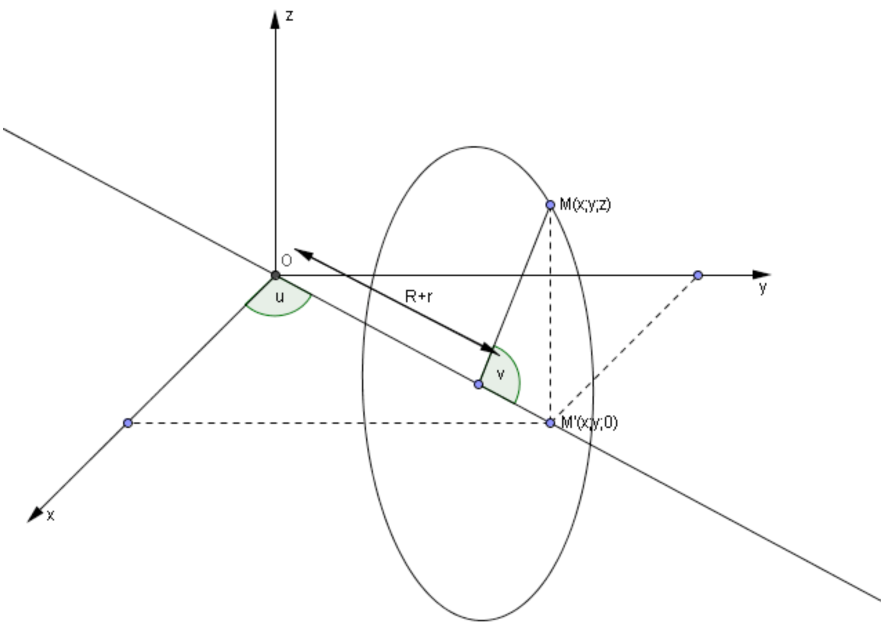
En effet, si $M'(x;y;0)$ est la projection de M sur le plan xOy, comme $OM'=\sqrt{x^2+y^2}$ et $OI=R+r$, par Thalès, on a : $\frac{x_I}{x_{M'}}=\frac{y_I}{y_{M'}}=\frac{OI}{OM'}$, d'où : $x_I=\frac{x(R+r)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $y_I=\frac{y(R+r)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Comme $IM = r$, il vient : $x^2(\frac{R+r}{\sqrt{x^2+y^2}}-1)^2+y^2(\frac{R+r}{\sqrt{x^2+y^2}}-1)^2+z^2=r^2 \Leftrightarrow$

$(R+r-\sqrt{x^2+y^2})^2=r^2-z^2 \Leftrightarrow (R+r)^2-r^2+x^2+y^2+z^2=2(R+r)\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\left[x^2+y^2+z^2+R(R+2r)\right]^2=4(R+r)^2(x^2+y^2)} \quad (1)$$

Figure 2



Envisageons maintenant un plan tangent au tore en deux points du tore, T' et T'', symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine des axes et d'abscisses nulles (sans perte de généralité). En coupe verticale, on obtient la figure 3 (voir plus loin).

Un tel plan est d'équation : $z=\tan(\alpha)y=\frac{ry}{\sqrt{R(R+2r)}}$ (2)

(2) dans (1) : $\left[x^2+y^2+\frac{r^2}{R(R+2r)}y^2+R(R+2r)\right]^2-4(R+r)^2(x^2+y^2)=0$. (3)

Cette équation étant censée représenter la projection de deux cercles de l'espace dans le plan (xOy) elle devrait logiquement équivaloir à l'équation de deux ellipses.

Il s'agit donc de ramener (3) à une forme du type : $f(x;y)g(x;y)=0$ où $f(x;y)=0$ et $g(x;y)=0$ soient les équations de deux ellipses dans le plan (xOy) et de montrer qu'elles correspondent bien à la projection de deux cercles de l'espace situés dans le plan $z=\tan(\alpha)y$.

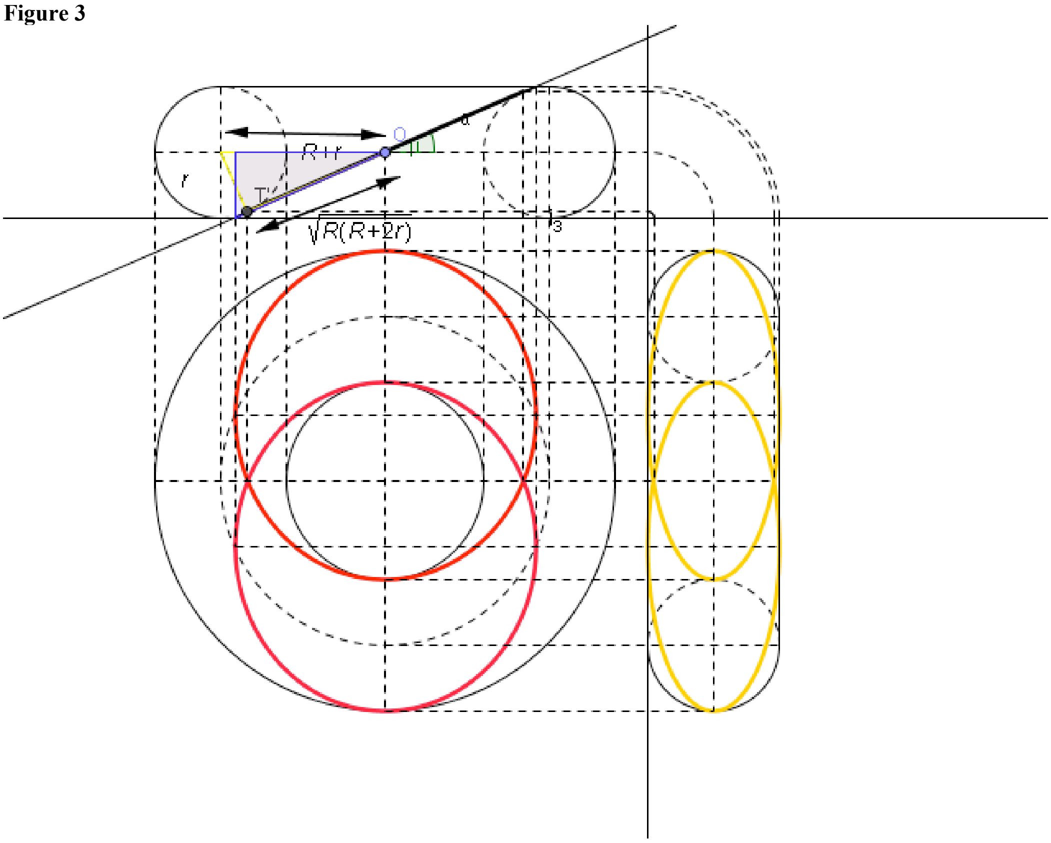
Or, c'est le cas si

$f(x;y) = (x+r)^2 + \dfrac{(R+r)^2}{R(R+2r)}y^2 - (R+r)^2$ et si $g(x;y) = (x-r)^2 + \dfrac{(R+r)^2}{R(R+2r)}y^2 - (R+r)^2$

En effet, le terme constant vaut : $(R+r)^4 - 2r^2(R+r)^2 + r^4 = R^2(R+2r)^2$, le terme en x disparaît, le coefficient de x^2 vaut : $-2r^2 - 2(R+r)^2 = 2R(R+2r) - 4(R+r)^2$, le coefficient de y^2 vaut : $\dfrac{2\left[r^2 - (R+r)^2\right](R+r)^2}{R(R+2r)} = 2(R+r)^2 - 4(R+r)^2$; quant à ceux de x^2y^2, y^4 et x^4, ils sont à l'évidence les mêmes.

Les formules de $f(x;y)$ et de $g(x;y)$ ne doivent évidemment rien au hasard. En effet : $f(x;y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+r)^2}{(R+r)^2} + \dfrac{y^2}{R(R+2r)} = 1$ et $g(x;y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-r)^2}{(R+r)^2} + \dfrac{y^2}{R(R+2r)} = 1$, équations de deux ellipses de demi grand axe $(R+r)$ et de demi petit axe $\sqrt{R(R+2r)}$, centrées, l'une en $(-r;0)$ et l'autre en $(r;0)$ et symétriques l'une de l'autre par rapport à (Oy) dans le plan (xOy).

Figure 3



.

Il reste encore à montrer que ces deux ellipses sont bien les projections de cercles situés dans le plan d'équation : $z = \tan(\alpha)y$.

Or, le demi grand axe selon la direction (Ox) est projeté en vraie grandeur sur (xOy), alors que le demi petit axe de longueur l est tel que $l\cos(\alpha) = \sqrt{R(R+2r)}$ avec $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{R(R+2r)}}} = \dfrac{\sqrt{R(R+2r)}}{R+r}$, d'où l'on tire : $l = R+r$.

La section du tore par un tel plan est donc bel et bien un couple de cercles de rayon $(R+r)$ centrés en $(-r;0;r)$ et $(r;0;r)$ respectivement.

Remarque : Toute la théorie qui précède peut être faite à partir des équations paramétriques du tore.

En effet le tore peut être défini à l'aide de deux paramètres u et v (voir figure 2) de la façon suivante :

$$x = (R+r+r\cos(v))\cos(u)$$
$$y = (R+r+r\cos(v))\sin(u)$$
$$z = r\sin(v)$$

Le plan tangent, lui, continue d'être régi par l'équation: $z = \dfrac{ry}{\sqrt{R(R+2r)}}$.

En éliminant *z*, *u* et *v* entre ces quatre équations de manière habile (je laisse ce soin au lecteur, …on sait ce que cela veut dire !) on retombe sur l'équation (3).
