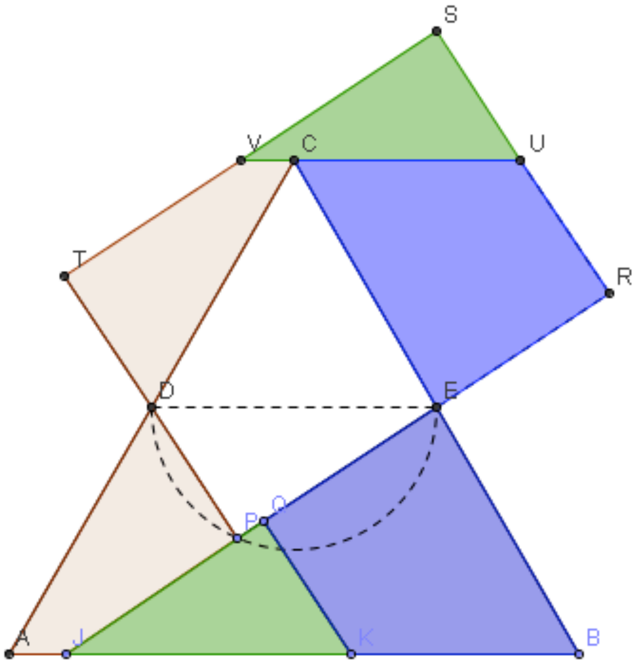
Un découpage célèbre de Henri Dudeney

Jean Piquerez
Collège et Ecole de Commerce Madame de Stael

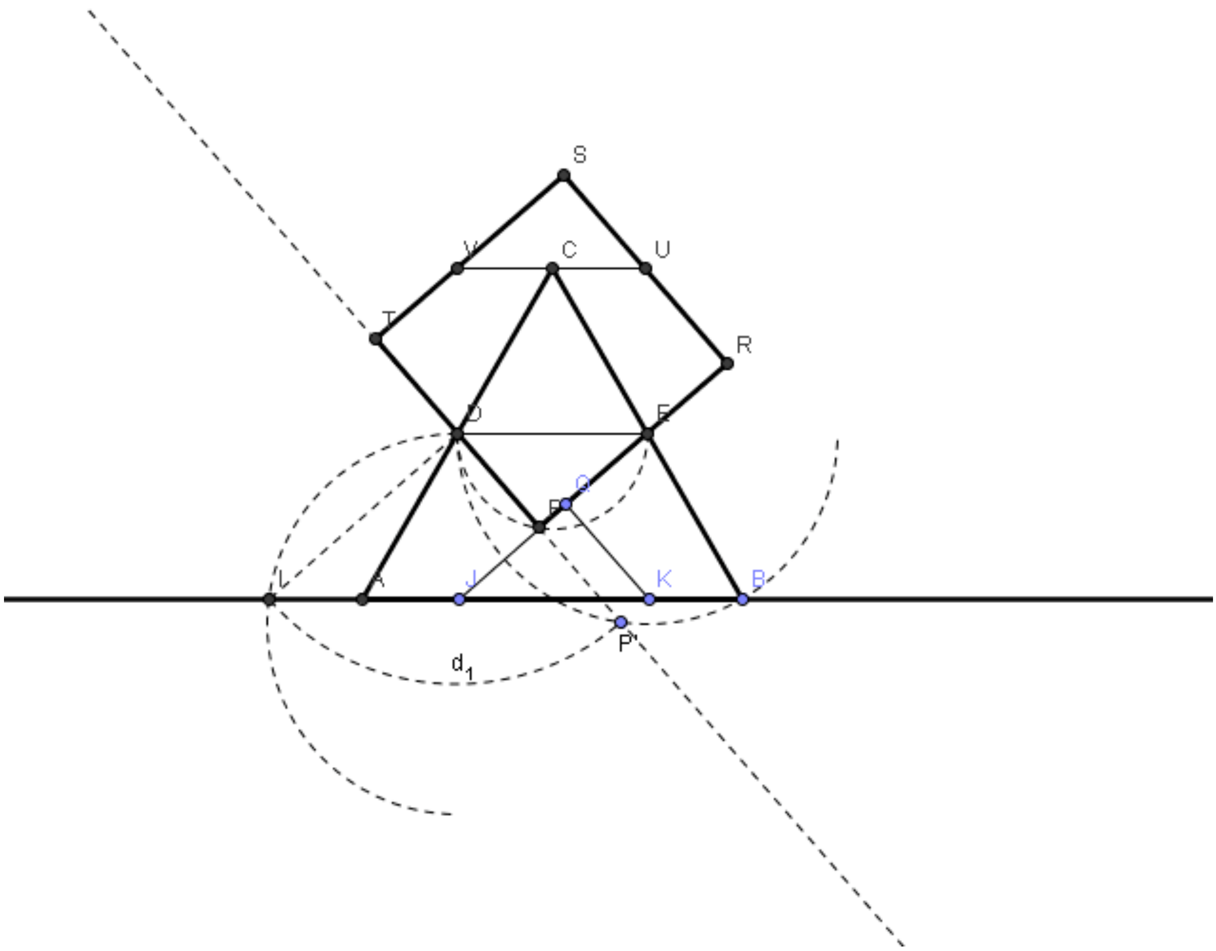
Dans le hors série numéro 24 de la publication « Tangente » consacré au triangle, je suis tombé sur un découpage célèbre du triangle équilatéral en quatre morceaux permettant de reconstituer un carré, et ceci, sans la moindre explication ou justification. Ne voulant pas rester sur ma faim, j'ai tenté de comprendre.
Soit un triangle équilatéral *ABC*, *D* et *E* étant les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[BC]$.Envisageons un point *P* quelconque sur le demi-cercle de diamètre *DE* (voir figure).
Alors le triangle *DPE* est rectangle en *P*. Construisons un triangle *KQJ* isométrique au triangle *DPE*, avec $JK = DE$. Un tel découpage permet la reconstitution du rectangle *PRST*, où le quadrilatère *ERUC* est le symétrique du quadrilatère *EQKP* par rapport à *E* , et le quadrilatère *DCVT*,celui du quadrilatère *DAJP* par rapport à *D*.



L'idée est désormais de trouver le (seul ?) point P pour lequel ce rectangle est un carré,c. à d. pour lequel on a : $PR = PT \Leftrightarrow PE + ER = PD + DT \Leftrightarrow PE + QE = 2DP \Leftrightarrow$

$$JQ + QE = 2DP \Leftrightarrow JE = 2DP\,.$$

Après mûre réflexion, j'ai trouvé une construction dans le plus pur style de la géométrie classique. En effet, puisque *JE = 2DP* et que *(JE)* ⊥ *(DP)*,on a les considérations suivantes :
Le point *P'* tel que $\overrightarrow{DP'} = 2\overrightarrow{DP}$ est sur le cercle de Thalès de centre *E* et de rayon *DE*, par une homothétie de centre *D* et de rapport 2. Par ailleurs, le 4ème sommet I du parallélogramme *DEJI* est sur (*AB*).
Comme *ID = JE = 2DP = DP'* et que (*ID*) ⊥ (*DP*') , I sera obtenu par l'intersection de (*AB*) avec l'image du demi-cercle contenant P' par la rotation de centre *D* et d'angle -π/2.
On construit donc d'abord *I*, puis *P*',par rotation de $\pi/2$ autour de *D*, puis *P*, intersection de (DP') avec le demi-cercle de diamètre DE, puis *T*, symétrique de *P* par rapport à *D*, et on complète le carré.



C'est en 1905 que Henri Dudeney (1857-1930), un amateur de jeux et de casse-tête,découvrit ce découpage. D'une manière générale D.Hilbert a démontré qu'il est possible de transformer, après découpage en un nombre fini de parties, tout polygone en tout autre polygone d'aire égale.